变分不等式问题与算法

方长杰　陈胜兰　著



科学出版社

(O-6696.31)





科学出版社互联网入口

科学数理分社
电 话：(010) 64011058
Email：lixin_kx@mail.sciencep.com

销售分类建议：高等数学

www.sciencep.com



ISBN 978-7-03-050995-6

定 价：78.00 元

变分不等式问题与算法

方长杰　陈胜兰　著

科 学 出 版 社

北 京

内 容 简 介

本书内容大部分来源于作者近五年发表的学术研究论文. 本书主要介绍了变分不等式的若干迭代算法、变分不等式与不动点问题、集值变分不等式的投影算法、与集合序列相关的几类变分不等式的投影算法、Hadamard 流形上向量变分不等式与向量优化问题、Hadamard流形上变分不等式的投影算法、集值变分不等式的 Gap-泛函、半变分不等式等内容. 为阅读方便起见, 本书提供了非线性分析、黎曼流形、Sobolev 空间等阅读本书所需的一些背景知识.

本书适合于对变分不等式算法感兴趣的高年级本科生、研究生及相关科研人员阅读.

图书在版编目(CIP)数据

变分不等式问题与算法/方长杰, 陈胜兰著. —北京: 科学出版社, 2016.12

ISBN 978-7-03-050995-6

Ⅰ. ①变… Ⅱ. ①方… ②陈… Ⅲ. ①变分不等式-研究 Ⅳ. ①O178

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2016) 第 299617 号

责任编辑: 李 欣 / 责任校对: 李 影
责任印制: 张 伟 / 封面设计: 陈 敬

科学出版社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码: 100717
http://www.sciencep.com

北京教图印刷有限公司 印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销
*
2017 年 1 月第 一 版 开本: 720 × 1000 B5
2017 年 1 月第一次印刷 印张: 12 1/4
字数: 236 000

定价: 78.00 元

(如有印装质量问题, 我社负责调换)

序　言

变分不等式问题是现代优化理论和非线性分析的重要组成部分, 它与力学、热学、微分方程、线性与非线性规划、最优化理论与控制等理论和应用学科有着密切的联系, 并广泛地应用于解决产生于上述领域的大量实际问题. 变分不等式始于人们对力学问题的研究. 1964 年, Fichera 在研究线性弹性体与刚性地基的无摩擦接触问题 (即 Signorini 问题) 的解时首次提出了“变分不等式”一词. 随后, 有关变分不等式的数学理论逐步建立并形成了专门的数学学科.

在实际问题中, 需要满足给定精度的变分不等式的近似解, 因此, 变分不等式问题的算法研究就成为一个非常重要的课题, 如牛顿算法、近似点方法等. 1964 年, Goldstein 在凸规划问题的研究中首先提出了投影算法, 投影算法因其计算比较简单, 吸引了许多学者借助其来研究变分不等式问题.

本书主要介绍变分不等式的投影算法, 同时讨论了与变分不等式相关的一些问题, 如 Hadamard 流形上的向量优化、Gap-泛函和正规映射等, 共分为 8 章. 第 1 章介绍了非线性分析、黎曼流形、Sobolev 空间等本书所需的一些背景知识, 该章中的大部分结果均未给出证明, 当然我们给出了主要的参考文献, 感兴趣的读者可以在其中找到详细的证明; 第 2 章主要介绍求解变分不等式的预测-校正迭代算法、近似点-投影算法和辅助函数法等三种迭代法; 第 3 章主要针对三种不同的非扩张型映射, 给出了寻找变分不等式问题的解集与非扩张映射的不动点集合公共元素的投影算法; 第 4 章通过 Armijo 线性搜索程序和超平面的不同选择, 给出了集值变分不等式的超梯度算法、二次投影算法、修正超梯度算法、次梯度算法等四种不同的投影算法, 并提供了相应的数值实验结果; 第 5 章讨论了求解单值、集值和广义等三种不同类型变分不等式与集合序列相关的投影算法, 是第 4 章部分结果的延伸和推广; 第 6 章给出了 Hadamard 流形上的向量变分不等式与不可微非凸向量优化问题的等价性, 并建立了向量优化问题解的存在性结果, 同时提出了 Hadamard 流形上集值变分不等式的投影算法; 第 7 章首先介绍了集值变分不等式的 Gap-泛函, 并建立了变分不等式解的误差界, 其次讨论了混合变分不等式的正规映射与不动点映射的相关概念和性质; 第 8 章主要介绍了 Navier-Stokes 型半变分不等式, 并建立了其解的存在性、唯一性和解对初始数据的连续依赖性等结果.

本书的阅读对象是本科高年级学生、研究生以及相关科研人员. 本书内容主要来自作者近年来发表的科研论文, 其中部分内容是近年来的热点研究课题, 如 Hadamard 流形上的变分不等式的相关理论与算法、用 Rothe 方法求解 Navier-

Stokes 型半变分不等式等. 希望本书能够对变分不等式算法感兴趣的读者有所帮助.

本书在编写过程中难免有不妥之处, 希望读者诚恳地提出建议并给予指正. 最后, 本书能够顺利出版, 还要感谢重庆邮电大学出版基金、重庆市自然科学基金 (CSTC, 2010BB9401) 和重庆市教委科学技术研究项目 (KJ110509) 的资助.

方长杰　陈胜兰

2016 年 8 月

目　　录

第 1 章　预 备 知 识

本章主要介绍了非线性分析、黎曼流形、Sobolev 空间等本书所需要的一些背景知识. 1.1 节主要介绍了泛函分析、非光滑分析等方面的内容, 如 Michael 选择定理在证明集值变分不等式解的存在性方面、满射性定理在证明半变分不等式解的存在性方面等均起着关键的作用. 1.2 节回顾了黎曼流形尤其是 Hadamard 流形方面的一些概念和定理, 如 Hadamard 流形上局部连续性、伪单调性、上 (下) 半连续性等概念以及 Lebourg 中值定理、三角形比较定理等定理, 它们是本书第 6 章的主要研究工具. 1.3 节简要地列举了 Sobolev 空间尤其是 Bochner-Lebesgue 空间 (定义在 $[0, T]$ 上) 的一些结果, 如紧嵌入定理、Lebesgue 控制收敛定理等, 它们在第 8 章的研究中起着本质的作用. 有关泛函分析、非光滑分析、黎曼流形、Sobolev 空间等方面的背景知识的证明和详细讨论, 可参考相关文献, 如文献 [1]、[32]、[36]、[128]、[155].

1.1　非线性分析

设 H 为 Hilbert 空间, 其内积和范数分别记为 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 和 $\|\cdot\|$, $\mathrm{CB}(H)$ 表示 H 的一切非空有界闭子集族. 我们用 $x_i \rightharpoonup x$ 表示序列 $\{x_i\}$ 弱收敛到 x, 用 $x_i \to x$ 表示序列 $\{x_i\}$ 强收敛到 x. 用 $\omega_w(x_i)$ 表示 $\{x_i\}$ 的弱聚点全体组成的集合, 即 $\omega_w(x_i) = \{x \in H : \{x_{i_j}\}$ 弱收敛到 x, 其中 $\{i_j\}$ 是 $\{i\}$ 的某个子序列$\}$. 对赋范空间 X, 我们用 $\|\cdot\|_X$ 表示它的范数, 用 X^* 表示它的对偶, 用 $\langle\cdot,\cdot\rangle_{X^*\times X}$ 表示 X^* 和 X 之间的对偶配对. 我们分别用 X_w 和 X_w^* 表示空间 X 赋予弱拓扑和它的对偶空间 X^* 赋予弱 * 拓扑, 有时我们也用 X 表示赋予强拓扑. 用符号 2^{X^*} 表示 X^* 的所有子集的全体所组成的集合. 用 a.e. 表示“几乎处处”. 若无特别说明, 我们总假定 X 是 Banach 空间.

设 K 为 Hilbert 空间 H 的非空闭凸子集, $\forall\, x \in H$, $\mathcal{P}_K(x)$ 表示 x 到 K 上的投影, 即

$$\mathcal{P}_K(x) = \mathrm{argmin}\{\|z - x\| : z \in K\}$$

其中, $\mathrm{argmin}\{F(x) : x \in K\}$ 表示 F 在 K 上的极小值点.

下面的三个引理给出了投影算子的一些性质.

引理 1.1[156]　给定 $z \in H$, $u \in K$ 满足变分不等式

$$\langle u-z, v-u\rangle \geqslant 0, \quad \forall v \in K \tag{1.1}$$

当且仅当

$$u=\mathcal{P}_K(z)$$

其中, $\mathcal{P}_K$ 是 H 到 K 上的投影算子, 而且 $\mathcal{P}_K$ 是非扩张的, 即

$$\|\mathcal{P}_K(x)-\mathcal{P}_K(y)\| \leqslant \|x-y\|, \quad \forall x, y \in H$$

引理 1.2　假设 K 是一个非空闭凸集合, $z \in K, x \in \mathrm{R}^n$. 那么下面的结论等价:

(i) $\|z-y\|^2 \leqslant \|x-y\|^2-\|z-x\|^2, \forall y \in K$;

(ii) $z=\mathcal{P}_K(x)$.

证明　对任意的 $y \in K$, 因为

$$\|x-y\|^2=\|x-z\|^2+\|z-y\|^2+2\langle x-z, z-y\rangle$$

根据引理 1.1, 我们立即得到结论.

引理 1.3[156]　设 $\mathcal{P}_K$ 表示 H 到 K 上的投影算子. 则

(i) $\langle z-\mathcal{P}_K(z), \mathcal{P}_K(z)-v\rangle \geqslant 0, \forall\, z \in H, v \in K$;

(ii) $\|\mathcal{P}_K(x)-\mathcal{P}_K(y)\|^2 \leqslant\langle\mathcal{P}_K(x)-\mathcal{P}_K(y), x-y\rangle, \forall\, x, y \in H$;

(iii) $\|\mathcal{P}_K(x)-y\|^2 \leqslant |x-y\|^2-\|x-\mathcal{P}_K(x)\|^2, \forall\, x \in H, \forall\, y \in K$;

(iv) $\|\mathcal{P}_K(x)-\mathcal{P}_K(y)\|^2 \leqslant\|x-y\|^2-\|\mathcal{P}_K(x)-x+y-\mathcal{P}_K(y)\|^2, \forall\, x, y \in H$.

下面我们介绍 η 算子单调性和 Lipschitz 连续性的概念.

定义 1.1　称映射 $\eta: H \times H \rightarrow H$ 为

(i) 单调的, 如果

$$\langle x-y, \eta(x, y)\rangle \geqslant 0, \quad \forall\, x, y \in H$$

(ii) 严格单调的, 如果

$$\langle x-y, \eta(x, y)\rangle>0, \quad \forall\, x, y \in H, x \neq y$$

(iii) σ-强单调的, 如果存在常数 $\sigma>0$ 使得

$$\langle x-y, \eta(x, y)\rangle \geqslant \sigma\|x-y\|^2, \quad \forall\, x, y \in H$$

(iv) δ-Lipschitz 连续的, 如果存在常数 $\delta>0$ 使得

$$\|\eta(x, y)\| \leqslant \delta\|x-y\|, \quad \forall\, x, y \in H$$

注解 1.1 由定义 1.1 的 (iii) 和 (iv) 有 $\sigma \leqslant \delta$.

注解 1.2 由定义 1.1(iii) 可得

$$\|\eta(x,y)\| \geqslant \sigma\|x-y\|, \quad \forall x,y \in H$$

接下来介绍单值算子的单调性、余强制性等概念.

定义 1.2 [146] 称映射 $g: H \to H$ 为

(i) μ-Lipschitz 连续的, 如果存在常数 $\mu > 0$ 使得

$$\|g(x)-g(y)\| \leqslant \mu\|x-y\|, \quad \forall x,y \in H$$

(ii) 强单调的, 如果

$$\langle g(x)-g(y), x-y\rangle \geqslant 0, \quad \forall x,y \in H$$

(iii) α-强单调的, 如果存在常数 $\alpha > 0$ 使得

$$\langle g(x)-g(y), x-y\rangle \geqslant \alpha\|x-y\|^2, \quad \forall x,y \in H$$

(iv) α-余强制的, 如果存在常数 $\alpha > 0$ 使得

$$\langle g(x)-g(y), x-y\rangle \geqslant \alpha\|g(x)-g(y)\|^2, \quad \forall\, x,y \in H$$

(v) 松弛 (γ,r)-余强制的, 如果存在常数 $\gamma > 0, r > 0$ 使得

$$\langle g(x)-g(y), x-y\rangle \geqslant -\gamma\|g(x)-g(y)\|^2 + r\|x-y\|^2, \quad \forall x,y \in H$$

注解 1.3 由定义 1.2(iii) 可得 $\|g(x)-g(y)\| \geqslant \alpha\|x-y\|, \forall\, x,y \in H$, 这蕴含了 g 的可逆性. 容易看出, 强单调性蕴含单调性, 但反之不真.

定义 1.3 设 $T, A: H \to \mathrm{CB}(H)$ 是集值映射, $N, \eta: H \times H \to H$ 和 $g: H \to H$ 是单值映射.

(i) 称 $N(\cdot,\cdot)$ 在第一变元关于 T 为 α-g-部分松弛 η-强单调的, 如果存在常数 $\alpha > 0$ 使得

$$\langle N(u_1,\cdot)-N(u_2,\cdot), \eta(g(z),g(y))\rangle \geqslant -\alpha\|g(x)-g(z)\|^2$$

$$\forall\, x,y,z \in H, \quad u_1 \in T(x), u_2 \in T(y)$$

类似可定义 $N(\cdot,\cdot)$ 在第二变元关于 A 的 g-部分松弛 η-强单调性.

(ii) 称映射 $N: H\times H\to H$ 在第一变元关于 T 为 β-强单调的, 如果存在常数 $\beta>0$ 使得

$$\langle N(T(x_1),\cdot)-N(T(x_2),\cdot),x_1-x_2\rangle \geqslant \beta\|x_1-x_2\|^2,\quad \forall x_1,x_2\in H$$

(iii) 称映射 $N: H\times H\to H$ 关于第一变元为 λ-Lipschitz 连续的, 如果存在常数 $\lambda>0$ 使得

$$\|N(u_1,\cdot)-N(u_2,\cdot)\|\leqslant \lambda\|u_1-u_2\|,\quad \forall u_1,u_2\in H$$

类似可定义 $N(\cdot,\cdot)$ 在第二变元关于 A 的强单调性和 Lipschitz 连续性.

(iv) 称 T 是 D-连续的, 如果由 $\{x_n\}\in H$ 和 $x_n\to x$ 可推出 $T(x_n)\to T(x)$, 其中 D 是 Hausdorff 度量, 即

$$D(A,B)=\max\left\{\sup_{x\in A}\inf_{y\in B}d(x,y),\sup_{y\in B}\inf_{x\in A}d(x,y)\right\},\quad A,B\subset H$$

注解 1.4　当 g 为恒等映射时, 定义 1.3(i) 变为 $N(\cdot,\cdot)$ 在第一变元关于 T 的 α-部分松弛 η-强单调性; 当 $\eta(y,x)=y-x$ 时, 定义 (i) 变为 $N(\cdot,\cdot)$ 在第一变元关于 T 的 α-g-部分松弛强单调性.

定义 1.4[112]　称泛函 $\varphi(\cdot,\cdot): H\times H\to(-\infty,+\infty]$ 是斜对称的, 如果

$$\varphi(x,x)-\varphi(x,y)-\varphi(y,x)+\varphi(y,y)\geqslant 0,\quad \forall x,y\in H$$

定义 1.5　设 $F(\cdot,\cdot,\cdot): K\times K\times K\to \mathrm{CB}(H)$ 是三元算子, $T,A: H\to \mathrm{CB}(H)$ 是两个多值映射, $g: K\to K$ 为单值映射, $\varphi(\cdot,\cdot): H\times H\to(-\infty,+\infty]$ 是二元泛函. 称 $F(\cdot,\cdot,\cdot)$ 与映射 T 及 A 关于二元泛函 $\varphi(\cdot,\cdot)$ 为 g-联合伪单调的, 对任意 $x,y\in K,\mu\in A(x),\nu\in T(x),s\in A(y),t\in T(y)$, 若

$$F(\mu,\nu,g(y))+\varphi(g(y),g(x))-\varphi(g(x),g(x))\geqslant 0$$

则

$$-F(s,t,g(x))+\varphi(g(y),g(x))-\varphi(g(x),g(x))\geqslant 0$$

根据定义 1.5 可知, 当 A,g 均为恒等映射时, 定义 1.1(i) 变为 $F(\cdot,\cdot,\cdot)$ 与 T 关于 $\varphi(\cdot,\cdot)$ 的联合伪单调性.

给定映射 $T: K\to K$. 在本节中, 除非特别说明, 我们用 $F(T)$ 表示映射 T 的不动点全体组成的集合.

下面我们给出非扩张映射以及严格伪压缩映射的定义.

定义 1.6[98] 设 $S: K \to K$ 为单值映射.

(i) 称 S 为非扩张的, 如果

$$\|Sx - Sy\| \leqslant \|x - y\|, \quad \forall\, x, y \in K$$

(ii) 称 $S: K \to K$ 为 θ-严格伪压缩的, 如果存在常数 $\theta \in [0, 1)$ 使得

$$\|Sx - Sy\|^2 \leqslant \|x - y\|^2 + \theta\|(I - S)x - (I - S)y\|^2, \quad \forall x, y \in K$$

其中, I 为恒等映射. 易见, 映射是非扩张的, 当且仅当它是 0-严格伪压缩的.

(iii) 称 $S: K \to K$ 是 δ-拟严格伪压缩的, 如果 $F(S) \neq \varnothing$ 且存在 $\delta \in [0, 1)$ 使得

$$\|Sx - p\|^2 \leqslant \|x - p\|^2 + \delta\|x - Sx\|^2, \quad \forall x \in K, p \in F(S)$$

易见, 如果 $F(S) \neq \varnothing$, 则严格伪压缩蕴含拟严格伪压缩.

严格伪压缩映射具有如下两个性质.

引理 1.4[98] 设 K 是 H 的非空闭凸子集. 如果 $S: K \to K$ 是 θ-严格伪压缩映射且 $F(S) \neq \varnothing$, 则 $F(S)$ 是闭凸集.

引理 1.5[82] 设 K 是实 Hilbert 空间 H 的非空闭凸子集. 如果 $S: K \to K$ 是 θ-严格伪压缩映射, 则映射 $I - S$ 在 0 点是次闭的, 即

$$x_i \rightharpoonup x, \quad Sx_i - x_i \to 0 \Rightarrow Sx = x$$

下面介绍集值映射单调性和连续性的概念.

定义 1.7 称集值映射 $F: H \to 2^H$ 为

(i) 单调的, 如果

$$\langle u - v, x - y\rangle \geqslant 0, \quad \forall u \in Fx, v \in Fy$$

(ii) 极大单调的, 如果 F 是单调的, 且其图没有真包含在任何其他单调映射的图中. 或等价地, 单调映射 F 是极大的, 当且仅当

$$(x, u) \in H \times H, \langle u - v, x - y\rangle \geqslant 0, \quad \forall\, v \in Fy \Rightarrow u \in Fx$$

定义 1.8[10] 设 X, Y 为拓扑空间, F 是从 X 到 Y 的集值映射.

(i) F 称为在 $x \in X$ 处上半连续, 如果对 $F(x)$ 的任一给定的邻域 $V \subset Y$, 存在 x 的邻域 U, 使得 $F(U) \subset V$.

(ii) F 称为在 $x \in X$ 处下半连续, 如果对任给的与 $F(x)$ 相交的开集 $V \subset Y$, 存在 x 的邻域 U, 使得当 $x \in U$ 时, 就有 $F(x) \cap V \neq \varnothing$. 等价地, 对任一收敛于 x 的序列 x_k 和任意 $y \in F(x)$, 均存在序列 $y_k \in F(x_k)$ 收敛于 y.

(iii) 如果 F 在 $x \in X$ 处既上半连续又下半连续, 则称 F 在 x 处连续.

(iv) 如果 F 是从 X 到 Y 的单值映射, 则 F 的上半连续性和下半连续性变为 F 的连续性.

下面介绍 η-次微分的概念.

定义 1.9[87] 设 $\eta : H \times H \to H, \varphi : H \to R \cup \{+\infty\}$.

(i) 如果

$$\langle \omega, \eta(y, x) \rangle \leqslant \varphi(y) - \varphi(x), \quad \forall y \in H$$

则 $\omega \in H$ 称为 φ 在 $x \in \mathrm{dom}\varphi$ 的 η-次梯度.

(ii) 集合

$$\partial_\eta \varphi(x) = \begin{cases} \{\omega \in H : \langle \omega, \eta(y, x) \rangle \leqslant \varphi(y) - \varphi(x), \forall y \in H\}, & x \in \mathrm{dom}\varphi \\ \varnothing, & x \notin \mathrm{dom}\varphi \end{cases}$$

称为 φ 在 $x \in \mathrm{dom}\varphi$ 的 η-次微分.

下面是集值映射 η-单调性的定义.

定义 1.10 设 $\eta : H \times H \to H$. 集值映射 $Q : H \to 2^H$ 称为

(i) η-单调的, 如果

$$\langle u - v, \eta(x, y) \rangle \geqslant 0, \quad \forall x, y \in H, u \in Q(x), v \in Q(y)$$

(ii) η-极大单调的, 如果 Q 是 η-单调的, 且没有任何其他 η-单调映射的图严格包含 Q 的图, 其中 Q 的图 $\mathrm{Graph}(Q) := \{(x, y) \in H \times H : y \in Q(x)\}$.

接下来我们给出 η-次微分的两个性质.

引理 1.6[87] 设 $\eta : H \times H \to H$ 满足

$$\eta(x, y) + \eta(y, x) = 0, \quad \forall x, y \in H$$

且 $\varphi : H \to R \cup \{+\infty\}$ 是真泛函, 则集值映射 $\partial_\eta \varphi : H \to 2^H$ 是 η-单调的.

引理 1.7[87] 设 $\eta : H \times H \to H$ 是严格单调的, $Q : H \to 2^H$ 是 η-单调的, 且满足 $R(I + \rho \partial_\eta \varphi) = H$, 其中 $R(\cdot)$ 表示值域, $\rho > 0$ 是常数, I 为恒等映射. 则 Q 是 η-极大单调的, 而且 $(I + \rho Q)^{-1}$ 是单值的.

由引理 1.6 和引理 1.7 可以得到下面的结论.

引理 1.8 设 $\eta: H\times H\to H$ 和 $\varphi: H\to R\cup\{+\infty\}$ 满足

(i) $\eta(x,y)+\eta(y,x)=0, \forall\, x,y\in H$;

(ii) $\eta: H\times H\to H$ 是严格单调的;

(iii) $R(I+\rho\partial_\eta\varphi)=H$, 其中, $R(\cdot)$ 表示值域, $\rho>0$ 是常数, I 为恒等映射.

则映射

$$J_\rho^\varphi(x):=(I+\rho\partial_\eta\varphi)^{-1}(x),\quad \forall\, x\in H$$

是单值的.

下面的引理表明, 在适当的假定下, 算子 J_ρ^φ 是 Lipschtiz 连续的.

引理 1.9 设 $\eta: H\times H\to H$ 是 σ-强单调和 δ-Lipschitz 连续的且满足

$$\eta(x,y)+\eta(y,x)=0,\quad \forall\, x,y\in H$$

则

$$\|J_\rho^\varphi(x)-J_\rho^\varphi(y)\|\leqslant\tau\|x-y\|,\quad \forall\ x,y\in H$$

其中, $\tau=\delta/\sigma$, $\sigma>0$, $\delta>0$ 是常数.

注解 1.5 由注解 1.1 知, $\tau\geqslant 1$.

定义 1.11 集合

$$\partial\varphi(x)=\{\xi\in H:\varphi(y)-\varphi(x)\geqslant\langle\xi,y-x\rangle,\forall\, y\in H\}$$

称为 φ 在 $x\in\mathrm{dom}\varphi$ 的次微分.

容易证明, $\partial\varphi(\cdot)$ 是极大单调映射, 且 $(I+\rho\partial\varphi)^{-1}: H\to H$ 是单值映射, 其中 $\rho>0$ 是常数, I 是恒等映射.

引理 1.10[21] 给定 $z\in H$, $x\in H$ 满足变分不等式

$$\langle x-z,y-x\rangle+\rho\varphi(y)-\rho\varphi(x)\geqslant 0,\quad \forall y\in H$$

当且仅当

$$x=J_\varphi(z)$$

其中, $J_\varphi:=(I+\rho\partial\varphi)^{-1}$ 为近似点映射, 而且 J_φ 是非扩张的, 即

$$\|J_\varphi x-J_\varphi y\|\leqslant\|x-y\|,\quad \forall x,y\in H$$

引理 1.11[151] 设 $\{\delta_n\}_{n=0}^\infty$ 是非负实序列, 满足

$$\delta_{n+1}\leqslant(1-\lambda_n)\delta_n+\sigma_n,\quad n\geqslant 0$$

其中, $\lambda_n \in [0,1], \sigma_n$ 是实序列, 且满足

(i) $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n = \infty$;

(ii) $\limsup_{n\to\infty} \sigma_n/\lambda_n \leqslant 0$ 或 $\sum_{n=1}^{\infty} |\sigma_n| < \infty$.

则 $\lim_{n\to\infty} \delta_n = 0$.

现在我们回顾几种收敛的概念.

定义 1.12　设 X 为赋范线性空间, X^* 为其对偶空间, $\|\cdot\|_X$ 表示 X 的范数, $\{x_n\} \subset X, x \in X, \{l_n\} \subset X^*, l \in X^*$.

(i) 称 x_n 强收敛到 x(记作 $x_n \to x$), 如果

$$\lim_{n\to\infty} \|x_n - x\|_X = 0$$

(ii) 称 x_n 弱收敛到 x(记作 $x_n \rightharpoonup x$), 如果

$$f(x_n) \to f(x), \quad \forall f \in X^*$$

(iii) 称 l_n 弱 * 收敛到 l(记作 $l_n \rightharpoonup^* l$), 如果

$$l_n(x) \to l(x), \quad \forall x \in X$$

赋范线性空间 X 赋予弱收敛所得拓扑, 称为 X 的弱拓扑, 记为 X_w, 而 X^* 赋予弱 * 收敛所得拓扑, 称为 X^* 的弱 * 拓扑, 记为 X^*_w.

下面介绍紧集的概念.

定义 1.13　设 X 为赋范线性空间, $M \subset X$.

(i) 称集合 M 是紧的, 如果 M 中每个序列都包含一个收敛的子序列, 其极限在 M 中;

(ii) 称集合 M 是相对紧的, 如果 $\overline{M}$ 是紧的, 其中 $\overline{M}$ 表示 M 的闭包;

(iii) 称集合 M 是弱紧的, 如果 M 中每个序列都包含一个弱收敛的子序列, 其极限在 M 中.

下面的三个结果是本质的.

命题 1.12　设 $(X, \|\cdot\|_X)$ 和 $(Y, \|\cdot\|_Y)$ 均为赋范线性空间, $F: X \to Y$ 是线性算子, 则 F 连续当且仅当 F 弱连续, 即 F 从 X_w 到 X_w 是连续的.

定理 1.13(Kakutani 定理)　Banach空间 X 是自反的当且仅当闭单位球 $\{x \in X \mid \|x\|_X \leqslant 1\}$ 是弱紧的.

定理 1.14 (Banach-Alaoglu 定理) 赋范线性空间 X 的对偶空间 X^* 中的闭单位球是紧的 (在弱 * 拓扑中).

在迭代法的收敛性证明中, 我们需要下面的两个引理.

引理 1.15 [8] 设 $F: H \to \mathrm{CB}(H)$, $x_0 \in H$, 若 $F(x_0)$ 是紧的且对任何 $\varepsilon > 0$, 存在 x_0 的邻域 $N(x_0)$, 使得对任何 $x \in N(x_0)$ 有 $D(F(x), F(x_0)) \leqslant \varepsilon$, 则 F 在点 x_0 上半连续. 其中 D 是 H 上的 Hausdorff 度量.

引理 1.16 [20] 设 $E \subset R^m$, $F \subset R^k$, $G: E \to 2^F$. 若 G 是紧值的, 则 G 上半连续当且仅当对任何 $x_n \to x$ 及 $y_n \in G(x_n)$, 序列 $\{y_n\}$ 都存在收敛子序列, 其极限包含于 $G(x)$ 中.

下面几个引理是第 3 章中算法收敛性分析的主要工具.

引理 1.17 [22] 设 H 是实的 Hilbert 空间, K 是 H 的非空闭凸子集, $T_i: K \to K (i = 1, 2, \cdots)$ 是非扩张映射且 $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty} F(T_i) \neq \varnothing$. 设 $S = \sum\limits_{i=1}^{\infty} k_i T_i$, 其中 $\sum\limits_{i=1}^{\infty} k_i = 1$, $k_i \subset (0, 1)$, 那么 S 是有定义的和非扩张的, 且 $F(S) = \bigcap\limits_{i=1}^{\infty} F(T_i)$.

引理 1.18 [82] 设 K 是 H 的非空闭凸子集, $\{x_i\}$ 是 H 中的一个序列且 $x \in H$. 令 $u = \mathcal{P}_K(x)$, 如果 $\omega_\omega(x_i) \subset K$ 且 $\|x_i - x\| \leqslant \|x - u\|$, $i = 1, 2, \cdots$, 那么 $x_i \to u$.

引理 1.19 [117] Hilbert 空间 H 满足 Opial 条件, 即对任何弱收敛于 x 的序列 $\{x_n\}$, 有

$$\liminf_{n\to\infty} \|x_n - x\| < \liminf_{n\to\infty} \|x_n - y\|, \quad \forall\, y \in H, x \neq y$$

引理 1.20 [137] 设 $\{x_n\}$ 和 $\{y_n\}$ 均为 Banach 空间 X 中的有界序列, 序列 $\{\beta_n\}$ 满足 $\beta_n \in [0, 1] (n = 0, 1, 2, \cdots)$ 和 $0 < \liminf\limits_{n\to\infty} \beta_n \leqslant \limsup\limits_{n\to\infty} \beta_n < 1$. 假设 $x_{n+1} = (1 - \beta_n) y_n + \beta_n x_n (n \geqslant 0)$ 和 $\limsup\limits_{n\to\infty} (\|y_{n+1} - y_n\| - \|x_{n+1} - x_n\|) \leqslant 0$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty} \|y_n - x_n\| = 0$.

引理 1.21 [143] 设 K 是实 Hilbert 空间 H 的非空闭凸子集. 设 $\{x_i\} \subseteq H$. 假设对所有的 $x \in K$, 有

$$\|x_{i+1} - x\| \leqslant \|x_i - x\|, \quad \forall\, i \in \mathbb{N}$$

则 $\{\mathcal{P}_K(x_i)\}$ 强收敛到某个 $z \in K$.

引理 1.22 [152] 设 X 为实 Banach 空间, 则对 $x, y \in X$ 有

$$\|x + y\|^2 \leqslant \|x\|^2 + 2\langle y, j(x + y)\rangle, \quad \forall\, j(x + y) \in J(x + y)$$

其中, $J(x) = \{f \in x^* | (f, x) = ||x||^2 = ||f||^2\} (x \in X)$ 为正规对偶映射.

下面两个结果是熟知的, 为完整起见, 我们给出了证明过程.

引理 1.23　设 $T: K \to H$ 为 α-余强制的且 $0 \leqslant \lambda \leqslant 2\alpha$, 则 $I - \lambda T$ 是非扩张的.

证明　对 $\forall u, v \in K$, 有

$$\begin{aligned}
&\|(I-\lambda T)u-(I-\lambda T)v\|^2 \\
=&\|(u-v)-\lambda(Tu-Tv)\|^2 \\
=&\|u-v\|^2-2\lambda\langle u-v, Tu-Tv\rangle+\lambda^2\|Tu-Tv\|^2 \\
\leqslant&\|u-v\|^2+\lambda(\lambda-2\alpha)\|Tu-Tv\|^2 \leqslant \|u-v\|^2
\end{aligned} \tag{1.2}$$

引理 1.24　对任意 $x \in H$ 和 $\mu > 0$, 有

$$\min\{1, \mu\}\|r_1(x)\| \leqslant \|r_\mu(x)\| \leqslant \max\{1, \mu\}\|r_1(x)\| \tag{1.3}$$

其中, $r_\mu(x) := x - \mathcal{P}_K(x - \mu T(x))$.

证明　假设 $\mu_2 \geqslant \mu_1 > 0$. 我们首先证明

$$\frac{\mu_1}{\mu_2}\|r_{\mu_2}(x)\| \leqslant \|r_{\mu_1}(x)\| \leqslant \|r_{\mu_2}(x)\| \tag{1.4}$$

令 $c := \dfrac{\|r_{\mu_1}(x)\|}{\|r_{\mu_2}(x)\|}$, 则我们只需证明

$$\frac{\mu_1}{\mu_2} \leqslant c \leqslant 1 \tag{1.5}$$

由于 $x - r_{\mu_1}(x) = \mathcal{P}_K(x - \mu_1 T(x))$, 故从引理 1.3(i) 可得

$$\langle y-(x-r_{\mu_1}(x)), x-\mu_1 T(x)-(x-r_{\mu_1}(x))\rangle \leqslant 0, \quad \forall y \in K \tag{1.6}$$

由于 $x - r_{\mu_2}(x) \in K$, 故根据式 (1.6) 有

$$\langle (x-r_{\mu_2}(x))-(x-r_{\mu_1}(x)), x-\mu_1 T(x)-(x-r_{\mu_1}(x))\rangle \leqslant 0$$

即

$$\langle r_{\mu_1}(x)-r_{\mu_2}(x), r_{\mu_1}(x)-\mu_1 T(x)\rangle \leqslant 0 \tag{1.7}$$

类似地, 有

$$\langle r_{\mu_2}(x)-r_{\mu_1}(x), r_{\mu_2}(x)-\mu_2 T(x)\rangle \leqslant 0 \tag{1.8}$$

分别用 μ_2 和 μ_1 乘以式 (1.7) 和式 (1.8) 的两边并相加可得

$$\langle r_{\mu_1}(x)-r_{\mu_2}(x), \mu_2 r_{\mu_1}(x)-\mu_1 r_{\mu_2}(x)\rangle \leqslant 0$$

从而

$$\mu_1\|r_{\mu_2}(x)\|^2+\mu_2\|r_{\mu_1}(x)\|^2\leqslant(\mu_1+\mu_2)\langle r_{\mu_1}(x),r_{\mu_2}(x)\rangle \tag{1.9}$$

运用 Cauchy-Schwarz 不等式, 根据式 (1.9) 有

$$\mu_1\|r_{\mu_2}(x)\|^2+\mu_2\|r_{\mu_1}(x)\|^2\leqslant(\mu_1+\mu_2)\|r_{\mu_2}(x)\|\|r_{\mu_1}(x)\| \tag{1.10}$$

用 $\|r_{\mu_2}(x)\|^2$ 除以式 (1.10) 的两边可得

$$\mu_1+\mu_2c^2\leqslant(\mu_1+\mu_2)c$$

因此式 (1.5) 成立. 从式 (1.4) 易见式 (1.3) 成立.

引理 1.25[73] 设 K 是 $\mathbb{R}^n$ 中的闭凸集, h 是 $\mathbb{R}^n$ 上的实值函数, $K:=\{x\in K:h(x)\leqslant 0\}$. 如果 $K\neq\varnothing$, h 在 K 上是 Lipschitz 连续的, Lipschitz 常数为 $\theta(\forall x,y\in K,|h(x)-h(y)|\leqslant\theta\|x-y\|)$, 则

$$\mathrm{dist}(x,K)\geqslant\theta^{-1}\max\{h(x),0\},\quad\forall x\in K \tag{1.11}$$

其中, $\mathrm{dist}(x,K)$ 是 x 到 K 的距离.

下面三个引理在集值变分不等式投影算法收敛性分析中起着决定性的作用.

引理 1.26[10] 设 X 和 Y 是 Hausdorff 拓扑空间, 如果 $F:X\to Y$ 是从紧空间 X 到 Y 的具有紧值的严格上半连续映射, 那么 $F(X)$ 是紧的.

引理 1.27[10] 设 X 和 Y 是 Hausdorff 拓扑空间, 如果 $F:X\to Y$ 是具有闭值的上半连续集值映射, 那么 F 是闭的 (即 F 的图是闭的).

设 X 和 Y 两个集合, $G:Y\to X$ 是集值映射, W 是 $X\times Y$ 上的实值函数. 定义

$$V:Y\to\mathbb{R},\ V(y):=\sup_{x\in G(y)}W(x,y)$$

和

$$N:Y\to X,\ N(y):=\{x\in G(y):V(y)=W(x,y)\}$$

则下面的结论成立:

引理 1.28[10] 设 X 和 Y 是 Hausdorff 拓扑空间, 如果 W 是上连续映射, G 是具有紧值的连续映射, 那么 V 是连续的, N 是上半连续的.

下面两个引理可以用来证明集值变分不等式解的存在性 (参见第 4 章).

引理 1.29[36] (Michael 选择定理) 设 X,Y 均为 Banach 空间, $F:M\subset X\to 2^Y\backslash\varnothing$ 是具有闭凸值的下半连续映射, 那么 F 容许一个连续选择.

引理 1.30[71]　设 M 是 $\mathbb{R}^n$ 的紧凸子集, $F: M \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ 是连续映射, 那么存在 $x \in M$ 使得

$$\langle F(x), y - x \rangle \geqslant 0, \quad \forall y \in M$$

下面的引理在误差界的分析中起着关键的作用.

引理 1.31[122]　设 $\beta > 0$ 为实数, $\{\alpha_n\}$ 是非负实数序列并满足 $\alpha_{n+1} \leqslant \alpha_n - \beta\alpha_n^2, \forall n \geqslant 0$, 则 $\alpha_n \leqslant \dfrac{\alpha_0}{1+\beta n \alpha_0}$.

我们用 NCCS($\mathbb{R}^n$) 表示 $\mathbb{R}^n$ 的非空闭凸子集族. 设 $\{K_i\}$ 为 NCCS($\mathbb{R}^n$) 中的集合序列.

定义 1.14[6]　设 K 和 $\{K_i\}$ 均为 NCCS($\mathbb{R}^n$) 中的集合, 称序列 $\{K_i\}$ 上图收敛到 K(记为 $K_i \overset{\text{epi}}{\to} K$), 如果下面两个条件同时成立:

(i) 对每个 $x \in K$, 存在序列 $\{x_i\}$ 使得对所有的 $i \geqslant 0$, $x_i \in K_i$, 且 $\lim\limits_{i\to\infty} x_i = x$;

(ii) 如果对所有的 $j \geqslant 0$, $x_{i_j} \in K_{i_j}$, 且 $\lim\limits_{j\to\infty} x_{i_j} = x$, 则 $x \in K$.

引理 1.32[130]　设 K 和 $\{K_i\}$ 分别为 NCCS($\mathbb{R}^n$) 中的集合和集合序列. 如果 $K_i \overset{\text{epi}}{\to} K$ 和 $\lim\limits_{i\to\infty} x_i = x$, 则

$$\lim_{i\to\infty} \mathcal{P}_{K_i}(x_i) = \mathcal{P}_K(x)$$

定义 1.15　设 $A, h: K \to \mathbb{R}^n$ 均为单值映射.

(i) 称 A 在 K 上是 h-伪单调的, 如果对任意的 $x, y \in K$, 有

$$\langle A(y), h(x) - h(y) \rangle \geqslant 0 \Rightarrow \langle A(x), h(x) - h(y) \rangle \geqslant 0$$

(ii) 称 h 关于某个点 $\overline{x} \in K$ 是 α-强单调的, 如果对任意的 $x \in K$, 有

$$\langle h(x) - h(\overline{x}), x - \overline{x} \rangle \geqslant \alpha \|x - \overline{x}\|^2$$

(iii) 称 $h^{-1}: \mathbb{R}^n \to 2^{\mathbb{R}^n}$ 在 K 上是局部有界的, 如果它映 K 中的有界集为 $\mathbb{R}^n$ 中的有界集.

现在我们给出在 Clarke 意义下局部 Lipschitz 泛函的广义方向导数和广义梯度的定义.

定义 1.16[32]　设 $f: X \to \mathbb{R}$ 是局部 Lipschitz 连续泛函. f 在点 $x \in X$ 沿方向 $v \in X$ 的广义方向导数 (记为 $f^0(x; v)$) 定义为

$$f^0(x; v) = \limsup_{y\to x, \lambda\downarrow 0} \frac{f(y+\lambda v) - f(y)}{\lambda}$$

f 在点 x 的广义梯度或次微分 (记为 $\partial f(x)$) 定义如下:

$$\partial f(x) = \{\zeta \in X^* \mid f^0(x; v) \geqslant \langle \zeta, v \rangle_{X^* \times X}\ \forall v \in X\}$$

称局部 Lipschitz 泛函 f 在点 $x \in X$ 是正则的 (在 Clarke 意义下), 如果对所有的 $v \in X$, 方向导数 $f'(x; v)$ 存在且 $f^0(x; v) = f'(x; v)$.

下面是 Clarke 次微分的一些性质.

命题 1.33[37] 设 $f : X \to \mathbb{R}$ 是局部 Lipschitz 连续泛函, 则

(i) 对任意的 $x \in X$, $\partial f(x)$ 是非空的, 凸的和弱 * 紧的;

(ii) 集值函数 $x \to \partial f(x)$ 是上半连续的 (从 X 到 X_w^*).

接下来我们回顾单值算子伪单调的定义.

定义 1.17[157] 称单值算子 $F : X \to X^*$ 是伪单调的, 如果

(i) F 有界 (即 F 将 X 中的有界集变为 X^* 中的有界集);

(ii) 在 X 中 $u_n \rightharpoonup u$ 和 $\limsup\limits_{n\to\infty} \langle Fu_n, u_n - u \rangle_{X^* \times X} \leqslant 0$ 蕴含

$$\langle Fu, u - v \rangle_{X^* \times X} \leqslant \liminf_{n\to\infty} \langle Fu_n, u_n - v \rangle_{X^* \times X}, \quad \forall v \in X$$

可以证明 (如参见文献 [100]), 算子 $F : X \to X^*$ 是伪单调的当且仅当 F 有界, 且 $u_n \rightharpoonup u$ 和 $\limsup\limits_{n\to\infty} \langle Fu_n, u_n - u \rangle_{X^* \times X} \leqslant 0$ 蕴含 $Fu_n \rightharpoonup Fu$ 和 $\lim\limits_{n\to\infty} \langle Fu_n, u_n - u \rangle_{X^* \times X} = 0$.

定义 1.18[102] 设 X 是自反 Banach 空间. 称集值算子 $F : X \to 2^{X^*}$ 是伪单调的, 如果下面的条件成立:

(i) F 具有非空有界闭凸值;

(ii) F 从 X 的每个有限维子空间到 X_w^* 是上半连续的;

(iii) 对任何满足 $u_n, u \in X$, $u_n \rightharpoonup u$, $u_n^* \in Fu_n$ 和 $\limsup\limits_{n\to\infty} \langle u_n^*, u_n - u \rangle_{X^* \times X} \leqslant 0$ 的序列 $\{u_n\} \subset X$ 和 $\{u_n^*\} \subset X^*$ 有, 对每个 $v \in X$, 存在 $u^*(v) \in Fu$ 使得

$$\langle u^*(v), u - v \rangle_{X^* \times X} \leqslant \liminf_{n\to\infty} \langle u_n^*(v), u - v \rangle_{X^* \times X}$$

下面的命题常被用来验证算子的伪单调性.

命题 1.34[38] 设 X 是实自反 Banach 空间, 并假设映射 $F : X \to 2^{X^*}$ 满足以下条件:

(i) 对每个 $v \in X$, $F(v)$ 是 X^* 的非空闭凸子集;

(ii) F 有界;

(iii) 如果在 X 中 $v_n \rightharpoonup v$, $v_n^* \in F(v_n)$, 在 X^* 中 $v_n^* \rightharpoonup v^*$, 且 $\limsup\limits_{n\to\infty}\langle v_n^*, v_n - v\rangle_{X^*\times X} \leqslant 0$, 那么 $v^* \in F(v)$, 且 $\langle v_n^*, v_n\rangle_{X^*\times X} \to \langle v^*, v\rangle_{X^*\times X}$.

则算子 F 是伪单调的.

命题 1.35[102] 设 X 是实自反 Banach 空间.

(i) 如果 $F: X \to 2^{X^*}$ 是极大单调算子且满足 $D(F) = X$, 则 F 是伪单调的;

(ii) 如果 $F_1, F_2: X \to 2^{X^*}$ 均为伪单调算子, 则 $F_1 + F_2$ 也是伪单调算子.

定义 1.19[102] 称算子 $F: X \to 2^{X^*}$ 是强制的, 如果 $D(F)$ 有界, 或者 $D(F)$ 无界且满足

$$\lim_{\|u\|_X\to\infty, u\in D(F)} \frac{\inf\{\langle u^*, u\rangle_{X^*\times X} \mid u^* \in Fu\}}{\|u\|_X} = +\infty$$

定理 1.36[38] 设 X 是自反 Banach 空间, 映射 $F: X \to 2^{X^*}$ 是伪单调和强制的, 则 F 是满射, 即 $R(F) = X^*$.

令 $I = (0, T)$, 用 $\mathrm{BV}(I; X)$ 表示 I 上的有界全变函数空间, 其具体定义如下: 设 π 表示区间 $\overline{I}$ 的有限划分, $0 = a_0 < a_1 < \cdots < a_n = T$, 并记 $\mathcal{F}$ 为所有这样划分全体组成的集合. 因此, 可以定义函数 $x: \overline{I} \to X$ 全变为

$$\|x\|_{\mathrm{BV}(I;X)} = \sup_{\pi\in\mathcal{F}} \sum_{i=1}^{n} \|x(a_i) - x(a_{i-1})\|_X$$

一般地, 对 $1 \leqslant q < \infty$, 可以类似定义

$$\|x\|_{\mathrm{BV}^q(I;X)}^q = \sup_{\pi\in\mathcal{F}} \sum_{i=1}^{n} \|x(a_i) - x(a_{i-1})\|_X^q$$

则空间 $\mathrm{BV}^q(I; X)$ 由所有满足 $\|x\|_{\mathrm{BV}^q(I;X)} < \infty$ 的函数 $x: I \to X$ 组成.

对 Banach 空间 X, Z, $X \subset Z$, 定义

$$M^{p,q}(I; X, Z) = L^p(I; X) \cap \mathrm{BV}^q(I; Z)$$

则 $M^{p,q}(I; X, Z)$ 是 Banach 空间 (其中 $1 \leqslant p, q < \infty$), 其范数为

$$\|\cdot\|_{L^p(I;X)} + \|\cdot\|_{\mathrm{BV}^q(I;Z)}$$

定理 1.37[83] 令 $1 \leqslant p, q < \infty$. 设 $X_1 \subset X_2 \subset X_3$ 均为实 Banach 空间, X_1 是自反的, 嵌入 $X_1 \subset X_2$ 是紧的, 嵌入 $X_2 \subset X_3$ 是连续的. 如果 $\mathcal{G}$ 是 $M^{p,q}(I; X_1, X_3)$ 的有界子集, 则 $\mathcal{G}$ 是 $L^p(I; X_2)$ 中的相对紧集.

我们需要如下 Aubin-Cellina 收敛定理.

定理 1.38[9] 设 X, Y 均为 Banach 空间. 多值映射 $F: X \to 2^Y$ 满足以下两个条件:

(i) 对每个 $x \in X$, $F(x)$ 是 Y 的非空闭凸子集;

(ii) F 是从 X 到 Y_w 上半连续的.

设 $x_n\colon (0,T) \to X$, $y_n\colon (0,T) \to Y$, $n \in \mathbb{N}$, 均为可测函数, 且满足在 $(0,T)$ 上, x_n 几乎处处收敛到函数 $x\colon (0,T) \to X$, 在 $L^1(0,T;Y)$ 中, y_n 弱收敛到函数 $y\colon (0,T) \to Y$. 如果对所有的 $n \in \mathbb{N}$ 和几乎所有的 $t \in (0,T)$ 有 $y_n(t) \in F(x_n(t))$, 则 $y(t) \in F(x(t))$ 对几乎处处 $t \in (0,T)$ 成立.

下面是离散的 Gronwall 不等式.

引理 1.39 [70] 给定 $T > 0$, 令 $k = T/N$, 其中 N 为正整数. 设 $\{s_n\}_{n=1}^N$ 和 $\{t_n\}_{n=1}^N$ 是两个非负数列并满足

$$t_n \leqslant \lambda_1 s_n + \lambda_1 \sum_{j=1}^{n} k t_n, \quad n = 1, 2, \cdots, N$$

其中, 正常数 λ_1 与 N 或 k 无关, 则存在正常数 λ_2(与 N 或 k 无关) 使得

$$\max_{1 \leqslant n \leqslant N} t_n \leqslant \lambda_2 \max_{1 \leqslant n \leqslant N} s_n$$

1.2 黎曼流形

微分流形是一类重要的拓扑空间, 它除了具有通常的拓扑结构外, 还添上了微分结构. 具体来说, 微分流形是一个 Hausdorff 空间. 黎曼流形是具有黎曼度量的微分流形, 换句话说, 这个流形上配备有一个对称正定的二阶协变张量场, 亦即在每一点切空间上配备一个正定二次型. 给了度量, 我们就可以像初等几何学一样, 测量长度、面积、体积等量. 黎曼流形作为一个几何概念有很多实际应用. 一些物理和技术系统的问题都可以表示为黎曼流形问题. 在系统中引进控制量, 就变为控制系统问题. 这种控制系统问题可转换为黎曼流形问题, 即微分几何控制问题. 下面我们回顾黎曼几何中的一些基本概念、记号和重要引理.

设 $\mathbb{M}$ 是连通的 m 维流形, 我们总是对 $\mathbb{M}$ 赋予黎曼度量使其变为黎曼流形. 令 $x \in \mathbb{M}$, $\mathbb{M}$ 在点 x 的切空间记为 $T_x\mathbb{M}$, 记号 $\langle \cdot, \cdot \rangle_x$ 和 $\|\cdot\|_x$ 分别表示切空间 $T_x\mathbb{M}$ 的标量积和其诱导的范数, 下标 x 通常被省略. 定义 $T\mathbb{M} = \bigcup_{x \in \mathbb{M}} T_x\mathbb{M}$ 为 $\mathbb{M}$ 的切丛, 它自然是一个流形. 对于连接 x 与 y 的光滑曲线 $\gamma : [a,b] \to \mathbb{M}$(即 $\gamma(a) = x$, $\gamma(b) = y$), 定义曲线 γ 的长度为 $L(\gamma) := \int_a^b \|\gamma'(t)\|_{\gamma(t)} \mathrm{d}t$. 连接 x 和 y 的所有曲线的长度的下确界称为黎曼距离 $d(x,y)$, 它可以诱导出 $\mathbb{M}$ 的原始拓扑.

设 ∇ 是关于黎曼度量的 Levi-Civita 联络, γ 是 $\mathbb{M}$ 上的光滑曲线. 一个向量场 X 称为沿曲线 γ 是平行的当且仅当 $\nabla_{\gamma'} X = 0$. 如果 γ' 沿曲线 γ 是平行的, 则称

γ 是测地线. 若 $\|\gamma'\| = 1$, 那么称曲线 γ 是正规的. 如果连接点 x 到 y 的测地线长度等于 $d(x, y)$, 则称之为最短测地线.

一个黎曼流形称为是完备的, 如果对每一个点 $x \in \mathbb{M}$, 从点 x 出发的所有测地线对任意 $-\infty < t < +\infty$ 都是可定义的. 由 Hopf-Rinow 定理可知, 如果 $\mathbb{M}$ 是完备的, 那么 $\mathbb{M}$ 中的任何两点都可用最短测地线来连接. 此外, 若 $(\mathbb{M}, d)$ 是完备度量空间, 则有界闭集是紧集.

我们用 $P_{\cdot,\gamma}^{\cdot}$ 来表示切丛 $T\mathbb{M}$ 上沿 γ 关于 ∇ 的平移, 其定义为

$$P_{\gamma(a),\gamma}^{\gamma(b)}(v) = V(\gamma(b)), \quad \forall a, b \in \mathbb{R}, v \in T_{\gamma(a)}\mathbb{M}$$

其中, V 是满足对所有的 t 有 $\nabla_{\gamma'(t)}V = 0$ 且 $V(\gamma(a)) = v$ 的唯一的向量场. 那么对任意的 $a, b \in \mathbb{R}$, $P_{\gamma(a),\gamma}^{\gamma(b)}$ 是 $T_{\gamma(a)}\mathbb{M}$ 到 $T_{\gamma(b)}\mathbb{M}$ 的一个等距线性同构. 当 γ 是连接点 x 到 y 的最短测地线的时候, 如果不引起混淆, 我们将把 $P_{x,\gamma}^{y}$ 简记为 $P_{y,x}$.

设 $\mathbb{M}$ 是完备的, 点 x 的指数映射 $\exp_x : T_x\mathbb{M} \to \mathbb{M}$ 定义为 $\exp_x v = \gamma_v(1, x)$, $v \in T_x\mathbb{M}$, 其中 $\gamma(\cdot) := \gamma_v(\cdot, x)$ 是满足 $\gamma(0) = x$ 和 $\gamma'(0) = v$ 的测地线. 那么对任意的 t 有 $\exp_x tv = \gamma_v(t, x)$. 在任意点 $x \in \mathbb{M}$, $\exp_x$ 在 $T_x\mathbb{M}$ 上是可微的.

一个完备的、具有非正截面曲率的单连通黎曼流形称为 Hadamard 流形. 下面我们介绍著名的 Cartan-Hadamard 定理, 它指明了指数映射在 Hadamard 流形上的特殊性质.

引理 1.40(Cartan-Hadamard 定理)　设 $\mathbb{M}$ 是一个 Hadamard 流形, 那么对 $\mathbb{M}$ 上的任意点 p, 指数映射 $\exp_p : T_p\mathbb{M} \to \mathbb{M}$ 是一个微分同胚, 对任意的两点 $p, q \in \mathbb{M}$, 存在唯一的正规测地线连接 p 和 q.

该定理的实质就是一个 Hadamard 流形与欧几里得空间 $\mathbb{R}^m$ 微分同胚. 在后文中, 除特别说明外, 我们总假设 $\mathbb{M}$ 是一个 m 维的 Hadamard 流形.

设 $\mathbb{M}$ 是一 Hadamard 流形, $\mathcal{X}(\mathbb{M})$ 表示所有集值向量场 $A : \mathbb{M} \to 2^{T\mathbb{M}}$ 的集合, 即对每一个 $x \in \mathbb{M}$, 都有 $A(x) \subseteq T_x\mathbb{M}$. 集合 $D(A) = \{x \in \mathbb{M} : A(x) \neq \varnothing\}$ 称为 A 的定义域.

定义 1.20　设 $A \in \mathcal{X}(\mathbb{M})$, 称 A 是

(i) 单调的, 如果对每个 $x, y \in D(A)$, 及任意 $u \in A(x)$, $v \in A(y)$, 有

$$\langle u, \exp_x^{-1} y \rangle \leqslant \langle v, -\exp_y^{-1} x \rangle$$

(ii) 伪单调的, 如果对每个 $x, y \in D(A)$, 及 $u \in A(x)$, 有

$$\langle u, \exp_x^{-1} y \rangle \geqslant 0 \Rightarrow \langle v, \exp_y^{-1} x \rangle \leqslant 0, \forall v \in A(y)$$

Hadamard 流形上的单调、伪单调向量场概念分别是欧几里得空间中单调、伪单调算子的推广. 关于单调向量场的相关理论的最新发展可以参看文献 [34]、[35]、[107]、[108]、[149]. 容易看出, 单调集值向量场一定是伪单调的, 但反之不然.

定义 1.21 [144] 设 $\mathbb{M}$ 为一黎曼流形, $f:\mathbb{M}\to(-\infty,+\infty]$ 为一正常函数. 如果存在 L_z 及 $\delta_z>0$ 使得

$$|f(x)-f(y)|\leqslant L_z d(x,y),\quad \forall x,y\in B(z,\delta_z)$$

成立, 则称函数 f 在点 $z\in\mathbb{M}$ 附近是 Lipschitz 的, L_z 称为 f 在 z 处的 Lipschitz 常数, 且 $B(z,\delta_z)=\{x\in\mathbb{M}:d(z,x)<\delta_z\}$. 如果 f 在 $\mathbb{M}$ 中的任意点 x 附近都是 Lipschitz 的, 则称 f 在 $\mathbb{M}$ 上是局部 Lipschitz 的.

定义 1.22 [144] 设 $\mathbb{M}$ 为一黎曼流形, K 为 $\mathbb{M}$ 的开子集, $x,y\in\mathbb{M}$, 函数 $f:\mathbb{M}\to(-\infty,+\infty]$ 在 K 上是局部 Lipschitz 的. 称

$$f^\circ(x;v)=\limsup_{y\to x,t\downarrow 0}\frac{f\circ\varphi^{-1}(\varphi(y)+t\mathrm{d}\varphi(x)(v))-f\circ\varphi^{-1}(\varphi(y))}{t}$$

是 f 在点 $x\in K$ 处沿方向 $v\in T_x\mathbb{M}$ 的广义方向导数 (或称为 Clarke 方向导数), 其中 (φ,U) 是 x 处的坐标卡. 事实上, $f^\circ(x;v)=(f\circ\varphi^{-1})^\circ(\varphi(x);\mathrm{d}\varphi(x)(v))$. 考虑到 $0_x\in T_x\mathbb{M}$, 我们有

$$f^\circ(x;v)=(f\circ\exp_x)^\circ(0_x,v)$$

定义 1.23 [144] 设 $\mathbb{M}$ 为一黎曼流形, K 为 $\mathbb{M}$ 的开子集, $f:\mathbb{M}\to(-\infty,+\infty]$ 在 K 上是局部 Lipschitz 的. 我们称

$$\partial_c f(y)=\{\zeta\in T_y\mathbb{M}^*|f^\circ(y;v)\geqslant\langle\zeta,v\rangle,\ \forall v\in T_y\mathbb{M}\}$$

为 f 在点 $y\in K$ 处的广义次微分或 Clarke 次微分 (其中 $T_y\mathbb{M}^*$ 为 $T_y\mathbb{M}$ 的对偶空间).

引理 1.41 [76] (Lebourg 中值定理) 设 $\mathbb{M}$ 为一有限维黎曼流形, $x,y\in\mathbb{M}$, $\gamma:[0,1]\to\mathbb{M}$ 为一连接 x 和 y 的光滑曲线. 设 f 在 $\gamma[0,1]$ 上是局部 Lipschitz 的, 则存在 $0<t_0<1$ 及 $\xi\in\partial_c f(\gamma(t_0))$ 使得

$$f(y)-f(x)=\langle\xi,\gamma'(t_0)\rangle$$

引理 1.42 [76] 设 $\mathbb{M}$ 为一黎曼流形, 函数 $f:\mathbb{M}\to R$ 在点 $x\in\mathbb{M}$ 附近是 Lipschitz 的, 其 Lipschitz 常数为 L_N, 那么

(i) $\partial_c f(x)$ 是非空弱 * 紧凸子集, 且对任意 $\xi\in\partial_c f(x)$, 有 $\|\xi\|_*\leqslant L_N$.

(ii) 设 $\{x_i\}$ 和 $\{\xi_i\}$ 分别是 $\mathbb{M}$ 及 $T\mathbb{M}^*$ 中的两序列, 且对每个 i, 有 $\xi_i\in\partial_c f(x_i)$. 若 $\{x_i\}$ 收敛于 x, $\{P_{x,x_i}\xi_i\}$ 收敛于 ξ, 则有 $\xi\in\partial_c f(x)$.

定义 1.24 [145]　设 $\mathbb{M}$ 为一黎曼流形, $K \subseteq \mathbb{M}$, 若对任意的 $x, y \in K$, 连接 x 和 y 的测地线属于 K; 即若 $\gamma : [0,1] \to \mathbb{M}$ 且满足 $\gamma(0) = x$, $\gamma(1) = y$, 则对任意 $t \in [0,1]$ 有 $\gamma(t) \in K$, 则称 K 为测地凸集. 如果 $\mathbb{M}$ 为 Hadamard 流形, K 为测地凸集的充要条件是 $\exp_y(t\exp_y^{-1} x) \in K$.

引理 1.43 [33]　设 $\mathbb{M}$ 为一 Hadamard 流形, K 是 $\mathbb{M}$ 一非空测地凸子集, 集值映射 $G : K \to 2^K$ 满足对任意的 $x \in K$, $G(x)$ 是闭集. 如果

(i) 存在 $x_0 \in K$ 使得 $G(x_0)$ 紧;

(ii) 对任意 $x_1, \cdots, x_m \in K$, $\mathrm{conv}(x_1, \cdots, x_m) \subset \bigcup\limits_{i=1}^{m} G(x_i)$.

那么 $\bigcap_{x \in K} G(x) \neq \varnothing$.

黎曼流形上的测地三角形 $\triangle(p_1, p_2, p_3)$ 是指由三点 p_1, p_2 和 p_3 以及连接这些点的最短测地线组成.

命题 1.44 [128] (三角形的比较定理)　设 $\triangle(p_1, p_2, p_3)$ 是一测地三角形. 对每个 $i = 1, 2, 3(\mathrm{mod} 3)$, 记 $\gamma_i : [0, l_i] \to \mathbb{M}$ 为连接 p_i 和 p_{i+1} 的测地线, $l_i := L(\gamma_i)$, $\alpha_i = \angle(\gamma_i'(0), -\gamma_{i-1}'(i_{i-1}))$. 则

(i) $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 \leqslant \pi$;

(ii) $i_i^2 + l_{i+1}^2 - 2 l_i l_{i+1} \cos\alpha_{i+1} \leqslant i_{i-1}^2$;

(iii) $l_{i+1} \cos\alpha_{i+2} + l_i \cos\alpha_i \geqslant l_{i+2}$.

根据距离概念和指数映射的定义, 由于

$$\langle \exp_{y_{i+1}}^{-1} y_i, \exp_{y_{i+1}}^{-1} y_{i+2} \rangle = d(y_i, y_{i+1}) d(y_{i+1}, y_{i+2}) \cos\alpha_{i+1}$$

命题 1.44 的结论 (ii) 可以改写成

$$d^2(y_i, y_{i+1}) + d^2(y_{i+1}, y_{i+2}) - 2\langle \exp_{y_{i+1}}^{-1} y_i, \exp_{y_{i+1}}^{-1} y_{i+2} \rangle \leqslant d^2(y_{i-1}, y_i)$$

设 K 为 $\mathbb{M}$ 的一非空闭凸子集, $\mathcal{P}_K$ 表示在 K 上的投影, 即

$$\mathcal{P}_K(v) = \{u \in K : d(v, u) \leqslant d(v, w), \forall w \in K\}, \quad \forall v \in \mathbb{M}$$

命题 1.45 [92]　设 K 为 $\mathbb{M}$ 的一非空闭凸子集, 那么

(i) $\mathcal{P}_K$ 是单值的;

(ii) 对任意 $v \in \mathbb{M}$, $u = \mathcal{P}_K(v)$ 当且仅当

$$\langle \exp_u^{-1} v, \exp_u^{-1} \omega \rangle \leqslant 0, \quad \omega \in K \tag{1.12}$$

(iii) $\mathcal{P}_K$ 是非扩张映射, 即对任意 $u, v \in \mathbb{M}$ 有

$$d(\mathcal{P}_K(u), \mathcal{P}_K(v)) \leqslant d(u, v) \tag{1.13}$$

引理 1.46[91] 设 $x_0 \in \mathbb{M}$, $\{x_n\} \subset \mathbb{M}$ 且 $x_n \to x_0$. 那么有下面的结论:

(i) 对任意的 $y \in \mathbb{M}$, 有

$$\exp_{x_n}^{-1} y \to \exp_{x_0}^{-1} y \text{ 和 } \exp_y^{-1} x_n \to \exp_y^{-1} x_0$$

(ii) 如果 $v_n \in T_{x_n}\mathbb{M}$ 且 $v_n \to v_0$, 那么 $v_0 \in T_{x_0}\mathbb{M}$;

(iii) 给定两序列 $\{u_n\}, \{v_n\} : u_n, v_n \in T_{x_n}\mathbb{M}$ 和点 $u_0, v_0 \in T_{x_0}\mathbb{M}$, 如果 $u_n \to u_0$, $v_n \to v_0$, 那么 $\langle u_n, v_n \rangle \to \langle u_0, v_0 \rangle$;

(iv) 对任意的 $u \in T_{x_0}\mathbb{M}$, 映射 $G : \mathbb{M} \to T\mathbb{M}$, $G(x) = P_{x,x_0}u$ 在 $\mathbb{M}$ 上是连续的.

引理 1.47[57] 设 $\mathbb{M}$ 是具有常值曲率的流形. 给定 $P' \in \mathbb{M}$, $s \in T_p'\mathbb{M}$, 则集合

$$L_{p',s} = \{p \in \mathbb{M} : \langle \exp_{p'}^{-1} p, s \rangle \leqslant 0\}$$

是凸的.

引理 1.48[140] 设 K 为 Hadamard 流形上 $\mathbb{M}$ 的一非空闭凸子集. 那么

$$d^2(\mathcal{P}_K(x), x^*) \leqslant d^2(x, x^*) - d^2(x, \mathcal{P}_K(x)), \quad \forall x \in \mathbb{M}, x^* \in K$$

下面的定义给出了 Hadamard 流形上映射的上 (下) 半连续的概念, 它们是 Banach 空间中相应概念的自然推广. 特别地, 定义 1.25(i) 和 (ii) 在文献 [90]、[93] 中介绍和研究过.

定义 1.25 设 $F \in \mathcal{X}(\mathbb{M})$, $x_0 \in \mathcal{D}(F)$.

(i) 如果对任意的开集 V 且满足 $F(x_0) \subseteq V \subseteq T_{x_0}\mathbb{M}$, 存在 x_0 的开邻域 $U(x_0)$ 使得对任意 $x \in U(x_0)$ 有 $P_{x_0,x}F(x) \subseteq V$, 那么称 F 在 x_0 处是上半连续的;

(ii) 若对任意序列 $\{x_k\} \subseteq \mathcal{D}(F)$ 及 $\{u_k\} \subseteq T\mathbb{M}$ 且 $u_k \in F(x_k)$, $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = x_0$ 及 $\lim\limits_{k\to\infty} u_k = u_0$ 蕴含着 $u_0 \in F(x_0)$, 则称 F 在点 x_0 处是上半 Kuratowski 连续的;

(iii) 对给定序列 $\{x_k\} \subseteq \mathcal{D}(F)$ 且收敛于 x, 对任意的 $y \in F(x)$, 存在序列 $\{y_k\} \subseteq T\mathbb{M}$, $y_k \in F(x_k)$ 且收敛于 y, 则称 F 在 x_0 处是下半连续的;

(iv) 如果 F 在任意点 $x \in D(F)$ 处是上半连续 (或上半 Kuratowski 连续, 下半连续) 的, 则称 F 在 K 上是上半连续 (或上半 Kuratowski 连续, 下半连续) 的.

注解 1.6 由定义 1.25 可知, 上半连续性蕴含上半 Kuratowski 连续. 若 K 是紧集且 F 是紧值的, 则反之亦成立.

1.3 Sobolev 空间

在介绍 Sobolev 空间之前, 先介绍弱导数 (或广义导数) 的概念. 为此, 先引入几个记号.

设 $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, $u : \Omega \to \mathbb{R}$. u 的支集记作

$$\mathrm{supp} u = \{x \in \Omega | u(x) \neq 0\}$$

若紧集 $\overline{\mathrm{supp} u} \subset \Omega$, 其中 $\overline{\mathrm{supp} u}$ 表示 $\mathrm{supp} u$ 的闭包, 则称 u 在 Ω 中有紧支集, 也记作 $\mathrm{supp} u \subset\subset \Omega$.

定义 1.26 设 $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, $C_0^\infty(\Omega)$ 表示在 Ω 中具有紧支集的无穷次可微函数 (C^∞ 函数) 的集合:

$$C_0^\infty(\Omega) = \{u \in C^\infty(\Omega) : \mathrm{supp} u \subset\subset \Omega\}$$

设 $1 \leqslant p < \infty$. 下面给出局部 p-可积函数的定义.

定义 1.27 称可测函数 $u : \Omega \to \mathbb{R}$ 是局部 p-可积的, 如果对任意的 $\Omega' \subset \Omega$ 有 $u \in L^p(\Omega')$, 记作 $u \in L^p_{\mathrm{loc}}(\Omega)$.

设 Ω 是 $\mathbb{R}^d (d \in \mathbb{N})$ 的一个开子集. 令 $m = (m_1, m_2, \cdots, m_d)(m_i \geqslant 0, i = 1, 2, \cdots, d)$, $|m| = \sum_{i=1}^{d} m_i$ 和 $D^m = D_1^{m_1} D_2^{m_2} \cdots D_d^{m_d}$, 其中 $D_i = \partial / \partial x_i$.

下面介绍弱导数 (或广义导数) 的概念.

定义 1.28 设 $u \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$. 函数 $w \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ 称为 u 的 m 阶弱导数, 如果

$$\int_\Omega u D^m \varphi \mathrm{d}x = (-1)^{|m|} \int_\Omega w \varphi \mathrm{d}x, \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega)$$

记作 $w = D^m u$.

令 $C^k(\Omega)$ 为 Ω 上 k 阶连续可微函数全体组成的集合. 如果 $u \in C^{|m|}(\Omega)$, 则弱导数与经典导数相同.

设 $1 \leqslant p \leqslant \infty$, $k \in \mathbb{N}$. 定义 Sobolev 空间 $W^{k,p}(\Omega)$ 如下:

$$W^{k,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega) | D^m u \in L^p(\Omega), \forall |m| \leqslant k\}$$

对于 $k = 0$, 令 $W^{0,p}(\Omega) = L^p(\Omega)$.

空间 $W^{k,p}(\Omega)$ 赋予如下范数:

$$\|u\|_{W^{k,p}(\Omega)} = \begin{cases} \left(\sum_{|m| \leqslant k} \|D^m u\|^p_{L^p(\Omega)} \right)^{1/p}, & 1 \leqslant p < \infty \\ \max_{|m| \leqslant k} \|D^m u\|_{L^\infty(\Omega)}, & p = \infty \end{cases} \tag{1.14}$$

则 Sobolev 空间 $W^{k,p}(\Omega)$(赋予范数 1.14) 是 Banach 空间. 若 $p = 2$, 记 $W^{k,2}(\Omega) = H^k(\Omega)$.

下面介绍紧嵌入的概念. 为此, 先回顾紧算子的定义.

定义 1.29 设 X, Y 均为 Banach 空间, $F: X \to Y$ 是连续算子. 称算子 $F: X \to Y$ 是紧的, 如果 X 中任意有界序列 $\{x_n\}$ 的像 $\{F(x_n)\}$ 均包含 Y 中一个强收敛的子序列.

定义 1.30 设 X, Y 均为赋范线性空间. 称 X 嵌入 (连续地) 到 Y(记作 $X \hookrightarrow Y$), 如果下面两个条件成立:

(i) $X \subset Y$.

(ii) 嵌入算子 $i: X \to Y$(定义为 $i(x) = x, \forall x \in X$) 是连续的. 或等价地, 存在常数 $\bar{c} > 0$ 使得

$$\|x\|_Y \leqslant \bar{c}\|x\|_X, \quad \forall\, x \in X$$

称 X 紧嵌入到 Y(记作 $X \Subset Y$), 如果嵌入算子 i 是紧的.

可以证明, $X \Subset Y$ 当且仅当对任意序列 $\{x_n\} \subset X$ 且 $x_n \rightharpoonup x$ 蕴含 $x_n \to x$.

给定 $T > 0$. 下面介绍 Bochner-Lebesgue 空间 $L^p(0, T; X)(p \in [1, \infty])$ 的定义. 关于更一般 Bochner-Lebesgue 空间的定义可参见文献 [102], 此处不再一一详述.

泛函 $u: (0, T) \to X$ 被称为可测的当且仅当存在简单泛函 (即逐段常值泛函) 序列 $u_k: (0, T) \to X$ 使得

$$\lim_{k \to \infty} u_k(t) = u(t), \quad \text{a.e. } t \in (0, T)$$

令 $p \in [1, \infty)$. 空间 $L^p(0, T; X)$ 为满足下面条件的所有可测泛函 $u: (0, T) \to X$ 的全体组成的集合:

$$\int_0^T \|u(t)\|_X^p \mathrm{d}t < \infty$$

其范数定义为

$$\|u\|_{L^p(0,T;X)} = \left(\int_0^T \|u(t)\|_X^p \mathrm{d}t\right)^{1/p} \tag{1.15}$$

空间 $L^\infty(0, T; X)$ 为满足下面条件的所有可测泛函 $u: (0, T) \to X$ 的全体组成的集合:

$$\|u\|_{L^\infty(0,T;X)} = \inf_{m(M)=0, M \subset (0,T)} \sup_{t \in (0,T) \setminus M} \|u(t)\|_X \tag{1.16}$$

有限.

下面介绍空间 $L^p(0, T; X)$ 的一些性质.

定理 1.49[72] 设 X 为 Hilbert 空间, 其标量积为 $\langle\cdot,\cdot\rangle_X$. 则 $L^2(0,T;X)$ 按如下定义的标量积也为 Hilbert 空间:

$$\langle u,v\rangle_{L^2(0,T;X)}=\int_0^T\langle u(t),v(t)\rangle_X\mathrm{d}t$$

定理 1.50[72] 设 X 为自反可分的 Banach 空间, 则

(i) 若 $p\in(1,\infty)$, 则空间 $L^p(0,T;X)$ 也是自反可分空间, 且其对偶空间为

$$[L^p(0,T;X)]^*=L^q(0,T;X^*)$$

其中, $1/p+1/q=1$.

(ii) 若 $p=1$, 则空间 $L^1(0,T;X)$ 是可分的, 且其对偶空间为

$$[L^1(0,T;X)]^*=L^\infty(0,T;X^*)$$

下面我们介绍 Bochner-Lebesgue 空间中弱导数 (或广义导数) 的概念.

用 $C_0^\infty(0,T)$ 表示在 $(0,T)$ 中具有紧支集的无穷次可微泛函的集合.

定义 1.31 设 X,Y 均为 Banach 空间, $u\in L^p(0,T;X),p\in[1,\infty]$. 可积函数 $v\in L^1(0,T;Y)$ 称为 u 的 i 阶弱导数, 如果

$$\int_0^T u(t)\varphi^{(i)}(t)\mathrm{d}t=(-1)^i\int_0^T v(t)\varphi(t)\mathrm{d}t,\quad\forall\varphi\in C_0^\infty(0,T)\tag{1.17}$$

其中, $\varphi^{(i)}$ 为 φ 的 i 阶导数, 记为 $u^{(i)}=v$. 式 (1.17) 中的积分是在 Bochner 意义下的.

下面的命题表明弱梯度与弱极限是相容的.

命题 1.51[72] 设 $p,q\in[1,\infty)$ 和 $i\in\mathbb{N}$, 其中 $\mathbb{N}$ 为自然数. 设 $X\hookrightarrow Y$, 则从 $u_k^{(i)}=v_k$, a.e. $t\in(0,T)(\forall k=1,2,\cdots)$, 在 $L^p(0,T;X)$ 中, $u_k\rightharpoonup u$, 以及在 $L^q(0,T;Y)$ 中, $v_k\rightharpoonup u$ 可推出

$$u^{(i)}=v,\quad \text{a.e. } t\in(0,T)$$

为后面证明之需, 我们给出 Bochner-Lebesgue 空间中的 Lebesgue 控制收敛定理.

定理 1.52[102] 设 X 为 Banach 空间, $T>0,1\leqslant p<\infty$. 如果 $u_n:(0,T)\to X$ 是可测泛函序列且满足:

(i) 对 a.e. $t\in(0,T)$ 有

$$\lim_{k\to\infty}u_k(t)=u(t)$$

(ii) 存在 $g \in L^1(0,T)$ 使得

$$\|u_k(t)\| \leqslant g(t), \quad \text{a.e. } t \in (0,T)$$

则 $u \in L^p(0,T;X)$ 且 $u_k \to u$ 于 $L^p(0,T;X)$.

设 $T>0$, $1<p<\infty$, 下面介绍空间 $W^{1,p}(0,T;V,H)$ 的概念. 为此, 先引入进化三元组空间 (V,H,V^*) 的概念.

定义 1.32 [72, 102] 称空间三元组 (V,H,V^*) 为进化三元组空间, 如果下面三个条件同时成立:

(i) V 是可分自反的 Banach 空间;

(ii) H 是可分的 Hilbert 空间;

(iii) $V \hookrightarrow H$, 且 V 在 H 中稠密.

定义空间 $W^{1,p}(0,T;V,H)$ 如下:

$$W^{1,p}(0,T;V,H) = \{u \in L^p(0,T;V) | u' \in L^q(0,T;V^*)\}, \quad 1/p + 1/q = 1$$

其范数定义为

$$\|u\|_{W^{1,p}(0,T;V,H)} = \|u\|_{L^p(0,T;V)} + \|u'\|_{L^q(0,T;V^*)} \tag{1.18}$$

用 $C(0,T;H)$ 表示所有连续泛函 $v:[0,T] \to H$ 全体组成的空间, 其范数定义为

$$\|v\|_{C(0,T;H)} = \max_{t\in[0,T]} \|v(t)\|_H$$

则有下面嵌入关系.

命题 1.53 [72] $W^{1,p}(0,T;V,H) \hookrightarrow C(0,T;H)$.

下面介绍两个不等式 (参见文献 [5]).

Gronwall 不等式 假定 $f,g \in C[a,b]$, $h \in L^1(a,b)$, $h(t) \geqslant 0$, a.e. $t \in (0,T)$, 且

$$f(t) \leqslant g(t) + \int_a^t h(s)\, f(s)\, \mathrm{d}s, \quad t \in [a,b]$$

则

$$f(t) \leqslant g(t) + \int_a^t g(s)\, h(s) \exp\left(\int_s^t h(r)\mathrm{d}r\right) \mathrm{d}s, \quad \forall\, t \in [a,b] \tag{1.19}$$

Young 不等式

$$ab \leqslant \frac{\delta\, a^p}{p} + \frac{\delta^{1-q} b^q}{q}, \quad a,b \geqslant 0,\ \delta>0,\ 1<p,q<\infty,\ \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1 \tag{1.20}$$

第 2 章　变分不等式的迭代法

本章首先应用辅助变分不等式的技巧, 在非紧假设条件下, 提出了求解广义混合似变分不等式 (具有二元泛函 $\varphi(\cdot,\cdot)$) 的预测-校正迭代算法, 并讨论了由算法所生成迭代序列的强收敛性. 然后提出了求解一类混合似变分不等式 (具有一元泛函 $\varphi(\cdot)$) 的近似点-投影算法, 并且运用扰动误差, 保证了由算法所生成迭代序列强收敛于非扩张映射不动点集合与变分不等式解集合的公共元素. 最后, 研究了一类带有三元算子的广义混合拟平衡问题, 运用辅助原理的技巧, 给出了这类平衡问题的新的迭代算法, 并讨论了由算法所生成迭代序列的强收敛性.

2.1　预测-校正迭代算法

设 H 为实 Hilbert 空间, 其内积和范数分别记为 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 和 $\|\cdot\|$. 设 $T,A:H\to \mathrm{CB}(H)$ 是两个多值映射, $N,\eta:H\times H\to H$ 和 $g:H\to H$ 均是单值映射, $\phi(\cdot,\cdot):H\times H\to(-\infty,+\infty]$ 是二元泛函.

考虑如下的广义混合似变分不等式问题 (简记为 GMVIP): 求 $x\in H,u\in T(x),v\in A(x)$ 使得

$$\langle N(u,v),\eta(g(y),g(x))\rangle+\varphi(g(y),g(x))-\varphi(g(x),g(x))\geqslant 0,\quad \forall\, g(y)\in H \tag{2.1}$$

问题 GMVIP(2.1) 包含了以下一些特殊情形:

(i) 当 g 为恒等映射时, 式 (2.1) 退化为: 求 $x\in H,u\in T(x),v\in A(x)$ 使得

$$\langle N(u,v),\eta(y,x)\rangle+\varphi(y,x)-\varphi(x,x)\geqslant 0,\ \forall\, y\in H \tag{2.2}$$

(ii) 当 $\eta(y,x)=y-x$ 时, 式 (2.1) 退化为: 求 $x\in H,u\in T(x),v\in A(x)$ 使得

$$\langle N(u,v),g(y)-g(x)\rangle+\varphi(g(y),g(x))-\varphi(g(x),g(x))\geqslant 0,\ \forall\, g(y)\in H \tag{2.3}$$

(iii) 设 $K:H\to 2^H$ 使得对每一 $x\in H$, $K(x)$ 是 H 的闭凸子集, 如果对每一 $x\in H$, $\varphi(\cdot,x)$ 是 $K(x)$ 的指标函数, 即

$$\varphi(x,x)\equiv I_{K(x)}(x)=\begin{cases}0, & x\in K(x)\\ +\infty, & x\notin K(x)\end{cases}$$

则式 (2.1) 退化为：求 $x \in H, g(x) \in K(x), u \in T(x), v \in A(x)$ 使得

$$\langle N(u,v), \eta(g(y), g(x))\rangle \geqslant 0, \quad \forall\, g(y) \in K(x) \tag{2.4}$$

总之, 适当选择映射 N, η, T, A, g 就可以获得许多新的和已知的变分不等式作为特例.

在介绍问题 GMVIP(2.1) 的迭代方法之前, 我们需要作如下假定：

假定 A $\eta(x,y) + \eta(y,z) = \eta(x,z), \forall\, x,y,z \in H.$

根据假定 A 容易得到下面的结论:

(i) $\eta(x,x) = 0, \forall x \in H;$

(ii) $\eta(x,y) = -\eta(y,x), \forall x,y \in H.$

针对问题 GMVIP(2.1), 我们给出如下的预测-校正迭代算法：

给定 $x \in H, u \in T(x), v \in A(x)$, 考虑以下辅助变分不等式问题: 求 $x^* \in H$ 使得

$$\begin{aligned}&\langle \rho N(u,v) + \eta(g(x^*), g(x)), \eta(g(y), g(x^*))\rangle \\ &+\rho\varphi(g(y), g(x^*)) - \rho\varphi(g(x^*), g(x^*)) \geqslant 0, \quad \forall\, g(y) \in H\end{aligned} \tag{2.5}$$

其中, $\rho > 0$ 是常数.

由 $\eta(x,x) = 0, \forall x \in H$, 我们观察到, 如果 $x^* = x$, 那么 (x,u,v) 是问题 GMVIP(2.1) 的一个解, 从而有如下迭代算法.

算法 2.1 **给定** $x_0, u_0 \in T(x_0)$ **和** $v_0 \in A(x_0)$, **则问题 GMVIP(2.1) 的近似解** (x_n, u_n, v_n) **由如下迭代方式确定:**

$$\begin{aligned}&\langle \mu N(u_n,v_n) + \eta(g(y_n), g(x_n)), \eta(g(y), g(y_n))\rangle \\ &+\mu\varphi(g(y), g(y_n)) - \mu\varphi(g(y_n), g(y_n)) \geqslant 0, \quad \forall\, g(y) \in H\end{aligned} \tag{2.6}$$

$$\begin{aligned}&\langle \beta N(c_n,d_n) + \eta(g(z_n), g(y_n)), \eta(g(y), g(z_n))\rangle \\ &+\beta\varphi(g(y), g(z_n)) - \beta\varphi(g(z_n), g(z_n)) \geqslant 0, \quad \forall\, g(y) \in H\end{aligned} \tag{2.7}$$

$$\begin{aligned}&\langle \rho N(e_n,f_n) + \eta(g(x_{n+1}), g(z_n)), \eta(g(y), g(x_{n+1}))\rangle \\ &+\rho\varphi(g(y), g(x_{n+1})) - \rho\varphi(g(x_{n+1}), g(x_{n+1}) \geqslant 0, \quad \forall\, g(y) \in H\end{aligned} \tag{2.8}$$

$$\begin{aligned}&u_n \in T(x_n), \quad \|u_{n+1} - u_n\| \leqslant [1 + 1/(n+1)]D(T(x_{n+1}), T(x_n)) \\ &v_n \in A(x_n), \quad \|v_{n+1} - v_n\| \leqslant [1 + 1/(n+1)]D(A(x_{n+1}), A(x_n)) \\ &c_n \in T(y_n), \quad \|c_{n+1} - c_n\| \leqslant [1 + 1/(n+1)]D(T(y_{n+1}), T(y_n)) \\ &d_n \in A(y_n), \quad \|d_{n+1} - d_n\| \leqslant [1 + 1/(n+1)]D(A(y_{n+1}), A(y_n))\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&e_n \in T(z_n), \quad \|e_{n+1}-e_n\| \leqslant [1+1/(n+1)]D(T(z_{n+1}),T(z_n))\\
&f_n \in A(z_n), \quad \|f_{n+1}-f_n\| \leqslant [1+1/(n+1)]D(A(z_{n+1}),A(z_n))\\
&n=0,1,2,\cdots
\end{aligned} \tag{2.9}
$$

其中, $\mu>0$, $\beta>0$, $\rho>0$ 均为常数, D 是 H 上的 Hausdorff 度量.

如果 g 为恒等映射, 那么算法 2.1 退化为求解变分不等式问题 (2.2) 的如下算法.

算法 2.2 给定 $x_0, u_0 \in T(x_0)$ 和 $v_0 \in A(x_0)$, 则问题 (2.2) 的近似解 (x_n, u_n, v_n) 由如下迭代方式确定:

$$
\begin{aligned}
&\langle \beta N(c_n,d_n)+\eta(z_n,y_n),\eta(y,z_n)\rangle+\beta\varphi(y,z_n)-\beta\varphi(z_n,z_n)\geqslant 0, \quad \forall y\in H\\
&\langle \mu N(u_n,v_n)+\eta(y_n,x_n),\eta(y,y_n)\rangle+\mu\varphi(y,y_n)-\mu\varphi(y_n,y_n)\geqslant 0, \quad \forall y\in H\\
&\langle \rho N(e_n,f_n)+\eta(x_{n+1},z_n),\eta(y,x_{n+1})\rangle+\rho\varphi(y,x_{n+1})-\rho\varphi(x_{n+1},x_{n+1})\geqslant 0, \quad \forall y\in H\\
&u_n \in T(x_n), \quad \|u_{n+1}-u_n\| \leqslant [1+1/(n+1)]D(T(x_{n+1}),T(x_n))\\
&v_n \in A(x_n), \quad \|v_{n+1}-v_n\| \leqslant [1+1/(n+1)]D(A(x_{n+1}),A(x_n))\\
&c_n \in T(y_n), \quad \|c_{n+1}-c_n\| \leqslant [1+1/(n+1)]D(T(y_{n+1}),T(y_n))\\
&d_n \in A(y_n), \quad \|d_{n+1}-d_n\| \leqslant [1+1/(n+1)]D(A(y_{n+1}),A(y_n))\\
&e_n \in T(z_n), \quad \|e_{n+1}-e_n\| \leqslant [1+1/(n+1)]D(T(z_{n+1}),T(z_n))\\
&f_n \in A(z_n), \quad \|f_{n+1}-f_n\| \leqslant [1+1/(n+1)]D(A(z_{n+1}),A(z_n))\\
&n=0,1,2,\cdots
\end{aligned}
$$

其中, $\mu>0$, $\beta>0$, $\rho>0$ 均为常数, D 是 H 上的 Hausdorff 度量.

如果 $\eta(y,x)=y-x$, 那么算法 2.1 退化为求解变分不等式问题 (2.3) 的如下算法.

算法 2.3 给定 $x_0, u_0 \in T(x_0)$ 和 $v_0 \in A(x_0)$, 则问题 (2.3) 的近似解 (x_n, u_n, v_n) 由如下迭代方式确定:

$$
\begin{aligned}
&\langle \mu N(u_n,v_n)+g(y_n)-g(x_n),g(y)-g(y_n)\rangle\\
&+\mu\varphi(g(y),g(y_n))-\mu\varphi(g(y_n),g(y_n))\geqslant 0, \quad \forall g(y)\in H\\
&\langle \beta N(c_n,d_n)+g(z_n)-g(y_n),g(y)-g(z_n)\rangle\\
&+\beta\varphi(g(y),g(z_n))-\beta\varphi(g(z_n),g(z_n))\geqslant 0, \quad \forall g(y)\in H\\
&\langle \rho N(e_n,f_n)+g(x_{n+1})-g(z_n),g(y)-g(x_{n+1})\rangle\\
&+\rho\varphi(g(y),g(x_{n+1}))-\rho\varphi(g(x_{n+1}),g(x_{n+1}))\geqslant 0, \quad \forall g(y)\in H
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&u_n \in T(x_n), \quad \|u_{n+1}-u_n\| \leqslant [1+1/(n+1)]D(T(x_{n+1}),T(x_n))\\
&v_n \in A(x_n), \quad \|v_{n+1}-v_n\| \leqslant [1+1/(n+1)]D(A(x_{n+1}),A(x_n))\\
&c_n \in T(y_n), \quad \|c_{n+1}-c_n\| \leqslant [1+1/(n+1)]D(T(y_{n+1}),T(y_n))\\
&d_n \in A(y_n), \quad \|d_{n+1}-d_n\| \leqslant [1+1/(n+1)]D(A(y_{n+1}),A(y_n))\\
&e_n \in T(z_n), \quad \|e_{n+1}-e_n\| \leqslant [1+1/(n+1)]D(T(z_{n+1}),T(z_n))\\
&f_n \in A(z_n), \quad \|f_{n+1}-f_n\| \leqslant [1+1/(n+1)]D(A(z_{n+1}),A(z_n))\\
&n=0,1,2,\cdots
\end{aligned}
$$

其中, $\mu>0$, $\beta>0$, $\rho>0$ 均为常数, D 是 H 上的 Hausdorff 度量.

如果 $\varphi(\cdot,\cdot)$ 关于第一变量是真凸下半连续泛函, 则算法 2.3 可写成如下形式.

算法 2.4 给定 $x_0, u_0 \in T(x_0)$ 和 $v_0 \in A(x_0)$, 通过以下方式确定近似解 (x_n,u_n,v_n):

$$
\begin{aligned}
g(y_n) &= J_\mu^{\partial\varphi(\cdot)}[g(x_n)-\mu N(u_n,v_n)]\\
g(z_n) &= J_\beta^{\partial\varphi(\cdot)}[g(y_n)-\beta N(c_n,d_n)]\\
g(x_{n+1}) &= J_\rho^{\partial\varphi(\cdot)}[g(z_n)-\rho N(e_n,f_n)]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&u_n \in T(x_n), \quad \|u_{n+1}-u_n\| \leqslant [1+1/(n+1)]D(T(x_{n+1}),T(x_n))\\
&v_n \in A(x_n), \quad \|v_{n+1}-v_n\| \leqslant [1+1/(n+1)]D(A(x_{n+1}),A(x_n))\\
&c_n \in T(y_n), \quad \|c_{n+1}-c_n\| \leqslant [1+1/(n+1)]D(T(y_{n+1}),T(y_n))\\
&d_n \in A(y_n), \quad \|d_{n+1}-d_n\| \leqslant [1+1/(n+1)]D(A(y_{n+1}),A(y_n))\\
&e_n \in T(z_n), \quad \|e_{n+1}-e_n\| \leqslant [1+1/(n+1)]D(T(z_{n+1}),T(z_n))\\
&f_n \in A(z_n), \quad \|f_{n+1}-f_n\| \leqslant [1+1/(n+1)]D(A(z_{n+1}),A(z_n))\\
&n=0,1,2,\cdots
\end{aligned}
$$

其中, $\partial\varphi(\cdot,u)\equiv\partial\varphi(\cdot)$, $J_\rho^{\partial\varphi(\cdot)}=(I+\rho\partial\varphi(\cdot))^{-1}$ 为预解算子, I 为恒等映射, $\mu>0$, $\beta>0$, $\rho>0$ 均为常数, D 是 H 上的 Hausdorff 度量.

注意到

$$
2\langle u,v\rangle=\|u+v\|^2-\|u\|^2-\|v\|^2, \quad \forall\, u,v\in H \tag{2.10}
$$

下面的引理在迭代法的收敛性分析中起着关键的作用.

引理 2.1 设 (x,u,v) 是变分不等式 GMVIP(2.1) 的一个解, $\{x_n\}$, $\{u_n\}$ 和 $\{v_n\}$ 是由算法 2.1 生成的近似解序列, 如果下述条件成立:

(i) $\varphi(\cdot,\cdot): H\times H\to(-\infty,+\infty]$ 是斜对称的;

(ii) $\eta(\cdot,\cdot): H \times H \to H$ 满足假定 A 且是 k-强单调的;

(iii) $N(\cdot,\cdot): H \times H \to H$ 在第一变元关于 T 是 s-g-部分松弛 η-强单调的;

(iv) $N(\cdot,\cdot): H \times H \to H$ 在第二变元关于 A 是 t-g-部分松弛 η-强单调的, 其中 $s>0, t>0$ 均为常数.

则有

$$\begin{aligned}\|\eta(g(x_{n+1}),g(x))\|^2 \leqslant & \|\eta(g(x_n),g(x))\|^2 \\ & -(1-2\rho(s+t)/k^2)\|\eta(g(x_{n+1}),g(z_n))\|^2 \end{aligned} \tag{2.11}$$

$$\begin{aligned}\|\eta(g(z_n),g(x))\|^2 \leqslant & \|\eta(g(z_{n-1}),g(x))\|^2 \\ & -(1-2\beta(s+t)/k^2)\|\eta(g(z_n),g(y_n))\|^2 \end{aligned} \tag{2.12}$$

$$\begin{aligned}\|\eta(g(y_n),g(x))\|^2 \leqslant & \|\eta(g(y_{n-1}),g(x))\|^2 \\ & -(1-2\mu(s+t)/k^2)\|\eta(g(y_n),g(x_n))\|^2 \end{aligned} \tag{2.13}$$

证明 设(x,u,v)是变分不等式GMVIP(2.1)的一个解, 则$u\in T(x), v\in A(x)$ 且

$$\langle \mu N(u,v),\eta(g(y),g(x))\rangle+\mu\varphi(g(y),g(x))-\mu\varphi(g(x),g(x))\geqslant 0 \tag{2.14}$$

$$\langle \beta N(u,v),\eta(g(y),g(x))\rangle+\beta\varphi(g(y),g(x))-\beta\varphi(g(x),g(x))\geqslant 0 \tag{2.15}$$

$$\langle \rho N(u,v),\eta(g(y),g(x))\rangle+\rho\varphi(g(y),g(x))-\rho\varphi(g(x),g(x))\geqslant 0 \tag{2.16}$$

其中, $\mu>0, \beta>0, \rho>0$ 均为常数.

分别在式 (2.16) 和式 (2.8) 中令 $y=x_{n+1}$ 及 $y=x$ 得

$$\langle \rho N(u,v),\eta(g(x_{n+1}),g(x))\rangle+\rho\varphi(g(x_{n+1}),g(x))-\rho\varphi(g(x),g(x))\geqslant 0 \tag{2.17}$$

$$\begin{aligned}&\langle \rho N(e_n,f_n)+\eta(g(x_{n+1}),g(z_n)),\eta(g(x),g(x_{n+1}))\rangle \\ &+\rho\varphi(g(x),g(x_{n+1}))-\rho\varphi(g(x_{n+1}),g(x_{n+1})\geqslant 0\end{aligned} \tag{2.18}$$

由 $\varphi(\cdot,\cdot)$ 的斜对称性及 $\eta(x,y)=-\eta(y,x)$, 并把式 (2.17) 和式 (2.18) 相加得

$$\begin{aligned}&\langle \eta(g(x_{n+1}),g(z_n)),\eta(g(x),g(x_{n+1}))\rangle \\ \geqslant\ & \rho\langle N(e_n,f_n)-N(u,v),\eta(g(x_{n+1}),g(x))\rangle \\ &+\rho[\varphi(g(x),g(x))-\varphi(g(x),g(x_{n+1})) \\ &-\varphi(g(x_{n+1}),g(x))+\varphi(g(x_{n+1}),g(x_{n+1}))] \\ \geqslant\ & \rho\langle N(e_n,f_n)_N(u,v),\eta(g(x_{n+1}),g(x))\rangle \\ =\ & \rho\langle N(e_n,f_n)-N(u,f_n),\eta(g(x_{n+1}),g(x))\rangle \\ &+\rho\langle N(u,f_n)_N(u,v),\eta(g(x_{n+1}),g(x))\rangle\end{aligned} \tag{2.19}$$

由式 (2.10) 及假定 A 有

$$\begin{aligned}&\langle\eta(g(x_{n+1}),g(z_n)),\eta(g(x),g(x_{n+1}))\rangle\\=&\frac{1}{2}[\|\eta(g(x_{n+1}),g(z_n))+\eta(g(x),g(x_{n+1}))\|^2\\&-\|\eta(g(x_{n+1}),g(z_n))\|^2-\|\eta(g(x),g(x_{n+1}))\|^2]\\=&\frac{1}{2}[\|\eta(g(x),g(z_n))\|^2-\|\eta(g(x_{n+1}),g(z_n))\|^2-\|\eta(g(x),g(x_{n+1}))\|^2]\end{aligned}\tag{2.20}$$

由 $\eta(\cdot,\cdot)$ 的 k-强单调性有

$$\|g(x_{n+1})-g(z_n)\|^2\leqslant(1/k^2)\|\eta(g(x_{n+1}),g(z_n))\|^2\tag{2.21}$$

由引理 2.1(iii) 和 (iv) 及式 (2.21) 得

$$\begin{aligned}&\rho\langle N(e_n,f_n)-N(u,f_n),\eta(g(x_{n+1}),g(x))\rangle+\rho\langle N(u,f_n)-N(u,v),\eta(g(x_{n+1}),g(x))\rangle\\\geqslant&-\rho(s+t)\|g(x_{n+1})-g(z_n)\|^2\geqslant-(\rho(s+t)/k^2)\|\eta(g(x_{n+1}),g(z_n))\|^2\end{aligned}\tag{2.22}$$

由式 (2.19)~式 (2.22) 可知: 当 $0<\rho<k^2/2(s+t)$ 时, 有

$$\begin{aligned}\|\eta(g(x_{n+1}),g(x))\|^2&\leqslant\|\eta(g(z_n),g(x))\|^2-(1-2\rho(s+t)/k^2)\|\eta(g(x_{n+1}),g(z_n))\|\\&\leqslant\|\eta(g(z_n),g(x))\|^2\end{aligned}\tag{2.23}$$

由此可得

$$\begin{aligned}\|\eta(g(x_n),g(x))\|^2&\leqslant\|\eta(g(z_{n-1}),g(x))\|^2-(1-2\rho(s+t)/k^2)\|\eta(g(x_n),g(z_{n-1}))\|\\&\leqslant\|\eta(g(z_{n-1}),g(x))\|^2\end{aligned}\tag{2.24}$$

分别在式 (2.15) 和式 (2.7) 中令 $y=z_n$ 及 $y=x$ 得

$$\langle\beta N(u,v),\eta(g(z_n),g(x))\rangle+\beta\varphi(g(z_n),g(x))-\beta\varphi(g(x),g(x))\geqslant0\tag{2.25}$$

$$\begin{aligned}&\langle\beta N(c_n,d_n)+\eta(g(z_n),g(y_n)),\eta(g(x),g(z_n))\rangle\\&+\beta\varphi(g(x),g(z_n))-\beta\varphi(g(z_n),g(z_n))\geqslant0\end{aligned}\tag{2.26}$$

把式 (2.25) 和式 (2.26) 相加, 再由引理 2.1 条件 (i)~(iv) 得

$$\begin{aligned}\langle\eta(g(z_n),g(y_n)),\eta(g(x),g(z_n))\rangle&\geqslant\beta\langle N(c_n,d_n)-N(u,v),\eta(g(z_n),g(x))\rangle\\&=\beta\langle N(c_n,d_n)-N(u,d_n),\eta(g(z_n),g(x))\rangle\\&\quad+\beta\langle N(u,d_n)-N(u,v),\eta(g(z_n),g(x))\rangle\\&\geqslant-\beta(s+t)\|g(z_n)-g(y_n)\|^2\\&\geqslant-(\beta(s+t)/k^2)\|\eta(g(z_n),g(y_n))\|^2\end{aligned}\tag{2.27}$$

由式 (2.10) 及假定 A 有

$$
\begin{aligned}
&\langle\eta(g(z_n),g(y_n)),\eta(g(x),g(z_n))\rangle\\
=&\frac{1}{2}[\|\eta(g(z_n),g(y_n))+\eta(g(x),g(z_n))\|^2-\|\eta(g(z_n),g(y_n))\|^2-\|\eta(g(x),g(z_n))\|^2]\\
=&\frac{1}{2}[\|\eta(g(x),g(y_n))\|^2-\|\eta(g(z_n),g(y_n))\|^2-\|\eta(g(x),g(z_n))\|^2]
\end{aligned}\tag{2.28}
$$

由式 (2.27) 和式 (2.28) 得: 当 $0<\beta<k^2/2(s+t)$ 时, 有

$$
\begin{aligned}
\|\eta(g(z_n),g(x))\|^2&\leqslant\|\eta(g(y_n),g(x))\|^2-(1-2\beta(s+t)/k^2)\|\eta(g(z_n),g(y_n))\|^2\\
&\leqslant\|\eta(g(y_n),g(x))\|^2
\end{aligned}\tag{2.29}
$$

由此可得

$$
\begin{aligned}
&\|\eta(g(z_{n-1}),g(x))\|^2\\
\leqslant&\|\eta(g(y_{n-1}),g(x))\|^2-(1-2\beta(s+t)/k^2)\|\eta(g(z_{n-1}),g(y_{n-1}))\|^2\\
\leqslant&\|\eta(g(y_{n-1}),g(x))\|^2
\end{aligned}\tag{2.30}
$$

分别在式 (2.14) 和式 (2.6) 中令 $y=z_n$ 和 $y=x$ 得

$$
\langle\mu N(u,v),\eta(g(y_n),g(x))\rangle+\mu\varphi(g(y_n),g(x))-\mu\varphi(g(x),g(x))\geqslant 0\tag{2.31}
$$

$$
\begin{aligned}
&\langle\mu N(u_n,v_n)+\eta(g(y_n),g(x_n)),\eta(g(x),g(y_n))\rangle\\
&+\mu\varphi(g(x),g(y_n))-\mu\varphi(g(y_n),g(y_n))\geqslant 0
\end{aligned}\tag{2.32}
$$

把式 (2.31) 和式 (2.32) 相加, 再由引理 2.1 条件 (i)~(iv) 得

$$
\begin{aligned}
\langle\eta(g(y_n),g(x_n)),\eta(g(x),g(y_n))\rangle&\geqslant\mu\langle N(u_n,v_n)-N(u,v),\eta(g(y_n),g(x))\rangle\\
&=\mu\langle N(u_n,v_n)-N(u,v_n),\eta(g(y_n),g(x))\rangle\\
&\quad+\mu\langle N(u,v_n)-N(u,v),\eta(g(y_n),g(x))\rangle\\
&\geqslant-\mu(s+t)\|g(y_n)-g(x_n)\|^2\\
&\geqslant-(\mu(s+t)/k^2)\|\eta(g(y_n),g(x_n))\|^2
\end{aligned}\tag{2.33}
$$

由式 (2.10) 及假定 A 有

$$
\begin{aligned}
\langle\eta(g(y_n),g(x_n)),\eta(g(x),g(y_n))\rangle&=\frac{1}{2}[\|\eta(g(y_n),g(x_n))+\eta(g(x),g(y_n))\|^2\\
&\quad-\|\eta(g(y_n),g(x_n))\|^2-\|\eta(g(x),g(y_n))\|^2]\\
&=\frac{1}{2}[\|\eta(g(x),g(x_n))\|^2-\|\eta(g(y_n),g(x_n))\|^2\\
&\quad-\|\eta(g(x),g(y_n))\|^2]
\end{aligned}\tag{2.34}
$$

由式 (2.23) 和式 (2.34) 得: 当 $0<\mu<k^2/2(s+t)$ 时, 有

$$\begin{aligned}\|\eta(g(y_n),g(x))\|^2 &\leqslant \|\eta(g(x_n),g(x))\|^2-(1-2\mu(s+t)/k^2)\|\eta(g(y_n),g(x_n))\|^2\\ &\leqslant \|\eta(g(x_n),g(x))\|^2\end{aligned} \tag{2.35}$$

由式 (2.23)、式 (2.29) 和式 (2.35) 得式 (2.11), 由式 (2.24)、式 (2.29) 和式 (2.35) 得式 (2.12), 由式 (2.24)、式 (2.30) 和式 (2.35) 得式 (2.13), 证毕.

如果 $\eta(x,y)=x-y$, 此时 $k=1$, 从而由引理 2.1 得如下结果.

推论 2.2 设 (x,u,v) 是变分不等式 (2.3) 的一个解, $\{x_n\}$, $\{u_n\}$ 和 $\{v_n\}$ 是由算法 2.3 生成的近似解序列, 如果下述条件成立:

(i) $\varphi(\cdot,\cdot):H\times H\to(-\infty,+\infty]$ 是斜对称的;

(ii) $N(\cdot,\cdot):H\times H\to H$ 在第一变元关于 T 是 s-g-部分松弛 η-强单调的;

(iii) $N(\cdot,\cdot):H\times H\to H$ 在第二变元关于 A 是 t-g-部分松弛 η-强单调的, 其中 $s>0,t>0$ 均为常数.

则有

$$\begin{aligned}\|g(x_{n+1})-g(x)\|^2 &\leqslant \|g(x_n)-g(x)\|^2-[1-2\rho(s+t)]\|g(x_{n+1})-g(z_n)\|^2\\ \|g(z_n)-g(x)\|^2 &\leqslant \|g(z_{n-1})-g(x)\|^2-[1-2\beta(s+t)]\|g(z_n)-g(y_n)\|^2\\ \|g(y_n)-g(x)\|^2 &\leqslant \|g(y_{n-1})-g(x)\|^2-[1-2\mu(s+t)]\|g(y_n)-g(x_n)\|^2\end{aligned}$$

定理 2.3 设 H 是有限维 Hilbert 空间, 如果下述条件成立:

(i) $g:H\to H$ 是连续且 ξ-强单调的单值映射;

(ii) $\varphi(\cdot,\cdot):H\times H\to(-\infty,+\infty]$ 是斜对称的连续泛函;

(iii) $\eta(\cdot,\cdot):H\times H\to H$ 是连续满足假定 A 且是 k-强单调的单值映射;

(iv) $T,A:H\to \mathrm{CB}(H)$ 是 D-连续的多值映射, $N:H\times H\to H$ 是连续的单值映射;

(v) $N(\cdot,\cdot):H\times H\to H$ 在第一变元关于 T 是 s-t-部分松弛 η-强单调的, 在第二变元关于 A 是 s-g-部分松弛 η-强单调的, 其中 $s>0,t>0$ 均为常数.

若 GMVIP(2.1) 的解集非空, 则当 $0<\rho,\beta,\mu<k^2/2(s+t)$ 时, 由算法 2.1 生成的迭代序列 $\{x_n\}$, $\{u_n\}$, $\{v_n\}$ 强收敛于 GMVIP(2.1) 的一个解 (x^*,u^*,v^*).

证明 对 GMVIP(2.1) 的任意一解 (x,u,v), 由引理 2.1 的式 (2.11)~式 (2.13) 可知: 序列 $\{\|\eta(g(x_{n+1}),g(x))\|\}$, $\{\|\eta(g(z_n),g(x))\|\}$ 和 $\{\|\eta(g(y_n),g(x))\|\}$ 均递减, 从而序列 $\{\|\eta(g(x_{n+1}),g(x))\|\}$, $\{\|\eta(g(z_n),g(x))\|\}$ 和 $\{\|\eta(g(y_n),g(x))\|\}$ 均有界, 从

引理 2.1 的式 (2.11)~ 式 (2.13) 可得

$$\sum_{n=0}^{\infty}(1-2\rho(s+t)/k^2)\|\eta(g(x_{n+1}),g(z_n))\|^2 \leqslant \|\eta(g(x_0),g(x)\|^2 \tag{2.36}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}(1-2\beta(s+t)/k^2)\|\eta(g(z_n),g(y_n))\|^2 \leqslant \|\eta(g(z_0),g(x))\|^2 \tag{2.37}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}(1-2\mu(s+t)/k^2)\|\eta(g(y_n,g(x_n))\|^2 \leqslant \|\eta(g(y_0),g(x))\|^2 \tag{2.38}$$

由以上三式可得

$$\|\eta(g(x_{n+1}),g(z_n))\| \to 0, \quad \|\eta(g(z_n),g(y_n))\| \to 0, \quad \|\eta(g(y_n),g(x_n))\| \to 0$$

由假定 A 有

$$\eta(g(x_{n+1}),g(x_n)) = \eta(g(x_{n+1}),g(z_n)) + \eta(g(z_n),g(y_n)) + \eta(g(y_n),g(x_n))$$

故

$$\begin{aligned}\|\eta(g(x_{n+1}),g(x_n))\| &= \|\eta(g(x_{n+1}),g(z_n)) + \eta(g(z_n),g(y_n)) + \eta(g(y_n),g(x_n))\| \\ &\leqslant \|\eta(g(x_{n+1}),g(z_n))\| + \|\eta(g(z_n),g(y_n))\| \\ &\quad + \|\eta(g(y_n),g(x_n))\| \to 0, \quad n \to \infty\end{aligned}$$

由 $g,\eta(\cdot,\cdot)$ 的强单调性知

$$k\xi\|x_{n+1}-x_n\| \leqslant \|\eta(g(x_{n+1}),g(x_n))\| \to 0$$

从而

$$\|x_{n+1}-x_n\| \to 0, \quad n \to \infty$$

又

$$k\xi\|x_n - x\| \leqslant \|\eta(g(x_n),g(x))\|$$

由于 $\{\|\eta(g(x_n),g(x))\|\}$ 有界, 从而 $\{x_n\}$ 有界, 故存在子序列 $\{x_{ni}\}$ 使得 $x_{ni} \to x^*$, 由 $g,\eta(\cdot,\cdot)$ 的连续性知

$$\eta(g(x_{ni}),g(x)) \to \eta(g(x^*),g(x)), \quad i \to \infty$$

从而

$$\eta(g(x_{ni}), g(x^*)) = \eta(g(x_{ni}), g(x)) - \eta(g(x^*), g(x)) \to 0, \quad i \to \infty$$

由假定 A 知, 当 $i \to \infty$ 时有

$$\begin{aligned}\|\eta(g(y_{ni}), g(x^*))\| &= \|\eta(g(y_{ni}), g(x_{ni})) + \eta(g(x_{ni}), g(x^*))\| \\ &\leqslant \|\eta(g(y_{ni}), g(x_{ni}))\| + \|\eta(g(x_{ni}), g(x^*))\| \to 0\end{aligned}$$

从而

$$\|\eta(g(y_{ni}), g(x^*))\| \to 0, \quad i \to \infty$$

又由 $g, \eta(\cdot,\cdot)$ 强单调性有

$$k\xi\|y_{ni} - x^*\| \leqslant \|\eta(g(y_{ni}), g(x^*))\| \to 0, \quad i \to \infty$$

从而有

$$y_{ni} \to x^*, \quad i \to \infty$$

类似可证

$$z_{ni} \to x^*, \quad i \to \infty$$

因 T, A 均是 D-连续的, 由引理 1.15 知, T, A 均上半连续, 又由引理 1.16 可知, 序列 $\{u_{ni}\}$, $\{v_{ni}\}$ 分别存在子序列 $\{u_{nj}\}$, $\{v_{nj}\}$ 使得 $u_{nj} \to u^*, v_{nj} \to v^*, u^* \in T(x^*), v^* \in A(x^*)$.

由式 (2.6) 有

$$\begin{aligned}&\langle \mu N(u_{nj}, v_{nj}) + \eta(g(y_{nj}), g(x_{nj})), \eta(g(y), g(y_{nj}))\rangle \\ &+\mu\varphi(g(y), g(y_{nj})) - \mu\varphi(g(y_{nj}), g(y_{nj})) \geqslant 0, \quad \forall\, g(y) \in H\end{aligned} \tag{2.39}$$

由 $N(\cdot,\cdot), \eta(\cdot,\cdot), \varphi(\cdot,\cdot), g$ 的连续性, 在式 (2.39) 中令 $j \to \infty$ 得

$$\begin{aligned}&\langle \mu N(u^*, v^*) + \eta(g(x^*), g(x^*)), \eta(g(y), g(x^*))\rangle \\ &+\mu\varphi(g(y), g(x^*)) - \mu\varphi(g(x^*), g(x^*)) \geqslant 0, \quad \forall\, g(y) \in H\end{aligned}$$

由 $\eta(g(x^*), g(x^*)) = 0$ 有

$$\langle N(u^*, v^*), \eta(g(y), g(x^*))\rangle + \varphi(g(y), g(x^*)) - \varphi(g(x^*), g(x^*)) \geqslant 0, \quad \forall\, g(y) \in H$$

从而 (x^*, u^*, v^*) 是 GMVIP(2.1) 的一个解.

由式 (2.11), 对任何 n 有

$$\|\eta(g(x_{n+1}), g(x^*))\| \leqslant \|\eta(g(x_n), g(x^*))\|$$

从而对任何 n 有

$$\|\eta(g(x_n), g(x^*))\| \leqslant \|\eta(g(x_{ni}), g(x^*))\| \to 0, \quad i \to \infty$$

由 $g, \eta(\cdot,\cdot)$ 的强单调性有

$$k\xi\|x_n - x^*\| \leqslant \|\eta(g(x_n), g(x^*))\| \to 0, \quad n \to \infty$$

从而

$$x_n \to x^*, \quad n \to \infty$$

由 T 的 D-连续性及式 (2.9) 有

$$\|u_n - u_{n+1}\| \leqslant (1 + 1/(n+1))D(T(x_n), T(x_{n+1})) \to 0, \quad n \to \infty$$

由此可得

$$\begin{aligned}\|u_n - u^*\| \leqslant &\|u_n - u_{n+1}\| + \|u_{n+1} - u_{n+2}\| + \cdots \\ &+ \|u_{nj-1} - u_{nj}\| + \|u_{nj} - u^*\| \to 0, \quad n \to \infty\end{aligned}$$

从而

$$u_n \to u^*, \quad n \to \infty$$

类似可证明

$$v_n \to v^*, \quad n \to \infty$$

证毕.

2.2 近似点-投影算法

设 H 为实 Hilbert 空间, 其内积和范数分别记为 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 和 $\|\cdot\|$, K 是 H 上的非空闭凸集. 设 $T, A, g : H \to H$ 均为单值映射, $N, \eta : H \times H \to H$ 是单值映射,

$S: K \to K$ 是非扩张映射, P_K 表示 H 到 K 上的投影算子,$\varphi: H \to R \cup \{+\infty\}$ 是真凸下半连续泛函.

考虑如下广义混合似变分不等式问题: 求 $x \in \mathrm{dom}\varphi$ 使得

$$\langle N(T(x), A(x)), \eta(y, g(x)) \rangle + \varphi(y) - \varphi(g(x)) \geqslant 0, \quad \forall y \in H \tag{2.40}$$

其中, $\mathrm{dom}\varphi := \{x \in H : \varphi(x) < \infty\} \neq \varnothing$.

问题 (2.40) 包含了以下一些特殊情形:

(i) 当 $\eta(x, y) = x - y, \forall x, y \in H$ 时, 式 (2.40) 退化为: 求 $x \in \mathrm{dom}\varphi$ 使得

$$\langle N(T(x), A(x)), y - g(x) \rangle + \varphi(y) - \varphi(g(x)) \geqslant 0, \quad \forall y \in H \tag{2.41}$$

(ii) 当 $N(x, y) = x - y$, $\eta(x, y) = x - y$, $\forall x, y \in H$ 时, 式 (2.40) 退化为: 求 $x \in \mathrm{dom}\varphi$ 使得

$$\langle T(x) - A(x), y - g(x) \rangle + \varphi(y) - \varphi(g(x)) \geqslant 0, \quad \forall y \in H \tag{2.42}$$

(iii) 当 $N(x, y) = x$, $\eta(x, y) = x - y$, $\forall x, y \in H$ 时, 式 (2.40) 退化为: 求 $x \in \mathrm{dom}\varphi$ 使得

$$\langle T(x), y - g(x) \rangle + \varphi(y) - \varphi(g(x)) \geqslant 0, \quad \forall y \in H \tag{2.43}$$

(iv) 当 $N(x, y) = x$, $\eta(y, g(x)) = y - g(x)$, $\forall x, y \in H$, 且对每一 $x \in H$, $\varphi(x)$ 是 K 的指示泛函, 即

$$\varphi(x) \equiv I_K(x) = \begin{cases} 0, & x \in K \\ +\infty, & x \notin K \end{cases}$$

时, 式 (2.40) 退化为: 求 $x \in H$, $g(x) \in K$ 使得

$$\langle Tx, g(y) - g(x) \rangle \geqslant 0, \quad \forall g(y) \in K \tag{2.44}$$

(v) 当 $N(x, y) = x, \eta(y, g(x)) = y - g(x), \forall x, y \in H, g$ 为恒等映射, 且对每一 $x \in H$, $\varphi(x)$ 是 K 的指示泛函时, 式 (2.40) 退化为: 求 $x \in K$ 使得

$$\langle Tx, y - x \rangle \geqslant 0, \quad \forall y \in K \tag{2.45}$$

下面的引理是近似点-投影算法的关键.

引理 2.4 $x \in \mathrm{dom}\varphi$ 是问题 (2.40) 的解当且仅当

$$g(x) = J_\rho^\varphi(g(x) - \rho N(T(x), A(x))) \tag{2.46}$$

其中, $\rho > 0$ 是常数, $J_\rho^\varphi := (I + \rho\partial_\eta\varphi)^{-1}$ 是近似点映射,I 表示恒等映射.

证明 由 J_ρ^φ 和 η-次微分的定义, 有

$$g(x) = J_\rho^\varphi(g(x) - \rho N(T(x), A(x)))$$

当且仅当

$$g(x) - \rho N(T(x), A(x)) \in g(x) + \rho\partial_\eta\varphi(g(x))$$

当且仅当

$$-N(T(x), A(x)) \in \partial_\eta\varphi(g(x))$$

当且仅当

$$\langle -N(T(x), A(x)), \eta(y, g(x))\rangle \leqslant \varphi(y) - \varphi(g(x)), \quad \forall\, y \in H$$

从而 $x \in \mathrm{dom}\varphi$ 是问题 (2.40) 的解.

接下来我们研究问题 (2.40) 的近似点-投影算法.

令$F(x) = x - g(x) + J_\rho^\varphi(g(x) - \rho N(T(x), A(x)))$, 则式(2.46)等价于$F(x) = x$, 即

$$x = x - g(x) + J_\rho^\varphi(g(x) - \rho N(T(x), A(x)))$$

设 $S: K \to K$ 是非扩张映射, $F(S)$ 和 $\mathrm{GMVI}(N, \eta, \varphi)$ 分别表示映射 S 的不动点集合及广义混合似变分不等式 (2.40) 的解集合, 如果 $x^* \in F(S) \cap \mathrm{GMVI}(N, \eta, \varphi)$, 则 $x^* \in F(S)$ 且 $x^* \in \mathrm{GMVI}(N, \eta, \varphi)$. 从而由引理 2.4 有

$$\begin{aligned} x^* &= Sx^* = x^* - g(x^*) + J_\rho^\varphi(g(x^*) - \rho N(T(x^*), A(x^*)) \\ &= \mathcal{P}_K[x^* - g(x^*) + J_\rho^\varphi(g(x^*) - \rho N(T(x^*), A(x^*))] \\ &= S\mathcal{P}_K[x^* - g(x^*) + J_\rho^\varphi(g(x^*) - \rho N(T(x^*), A(x^*))] \end{aligned} \tag{2.47}$$

其中, $\rho > 0$ 是常数.

由不动点方程 (2.47), 我们给出了寻求非扩张映射不动点集合与广义混合似变分不等式解集合公共元素的近似点-投影算法.

算法 2.5 给定 $x_0 \in H$, 变分不等式问题 (2.40) 的近似解序列 $\{x_n\}$ 由如下迭代方式确定:

$$\begin{aligned} z_n = (1 - c_n)x_n + c_n S\mathcal{P}_K[x_n - g(x_n) \\ + J_\rho^\varphi(g(x_n) - \rho N(T(x_n), A(x_n)))] + f_n \end{aligned} \tag{2.48}$$

$$\begin{aligned} y_n = (1 - b_n)x_n + b_n S\mathcal{P}_K[z_n - g(z_n) \\ + J_\rho^\varphi(g(z_n) - \rho N(T(z_n), A(z_n)))] + e_n \end{aligned} \tag{2.49}$$

$$\begin{aligned} x_{n+1} = (1 - a_n)x_n + a_n S\mathcal{P}_K[y_n - g(y_n) \\ + J_\rho^\varphi(g(y_n) - \rho N(T(y_n), A(y_n)))] + d_n \end{aligned} \tag{2.50}$$

其中, $a_n, b_n, c_n \in [0,1](n=0,1,2,\cdots)$, $d_n, e_n, f_n \in H(n=0,1,2,\cdots)$ 是扰动误差, $S: K \to K$ 是非扩张映射, $\mathcal{P}_K$ 是 H 到 K 上的投影算子, $J_\rho^\varphi := (I+\rho\partial\varphi)^{-1}$ 是近似点映射.

当 $\eta(x,y) = x-y, \forall x,y \in H$ 时, 算法 2.5 退化为求解变分不等式问题 (2.41) 的如下算法.

算法 2.6 给定 $x_0 \in H$, 变分不等式问题 (2.41) 的近似解 $\{x_n\}$ 由如下迭代方式确定:

$$
\begin{aligned}
z_n &= (1-c_n)x_n + c_n S\mathcal{P}_K[x_n - g(x_n) + J_\varphi(g(x_n) - \rho N(T(x_n), A(x_n)))] + f_n \\
y_n &= (1-b_n)x_n + b_n S\mathcal{P}_K[z_n - g(z_n) + J_\varphi(g(z_n) - \rho N(T(z_n), A(z_n)))] + e_n \\
x_{n+1} &= (1-a_n)x_n + a_n S\mathcal{P}_K[y_n - g(y_n) + J_\varphi(g(y_n) - \rho N(T(y_n), A(y_n)))] + d_n
\end{aligned}
$$

其中, $a_n, b_n, c_n \in [0,1](n=0,1,2,\cdots)$, $d_n, e_n, f_n \in H(n=0,1,2,\cdots)$ 是扰动误差, $S: K \to K$ 是非扩张映射, $\mathcal{P}_K$ 是 H 到 K 上的投影算子, $J_\varphi = (I+\rho\partial\varphi)^{-1}$ 是近似点映射.

当 $N(x,y) = x-y$, $\eta(x,y) = x-y$, $\forall x,y \in H$ 时, 算法 2.5 退化为求解变分不等式问题 (2.43) 的如下算法.

算法 2.7 给定 $x_0 \in H$, 变分不等式问题 (2.43) 的近似解 $\{x_n\}$ 由如下迭代方式确定:

$$
\begin{aligned}
z_n &= (1-c_n)x_n + c_n S\mathcal{P}_K[x_n - g(x_n) + J_\varphi(g(x_n) - \rho(T(x_n) - A(x_n)))] + f_n \\
y_n &= (1-b_n)x_n + b_n S\mathcal{P}_K[z_n - g(z_n) + J_\varphi(g(z_n) - \rho(T(z_n) - A(z_n)))] + e_n \\
x_{n+1} &= (1-a_n)x_n + a_n S\mathcal{P}_K[y_n - g(y_n) + J_\varphi(g(y_n) - \rho(T(y_n) - A(y_n)))] + d_n
\end{aligned}
$$

其中, $a_n, b_n, c_n \in [0,1](n=0,1,2,\cdots)$, $d_n, e_n, f_n \in H(n=0,1,2,\cdots)$ 是扰动误差, $S: K \to K$ 是非扩张映射, $\mathcal{P}_K$ 是 H 到 K 上的投影算子, $J_\varphi = (I+\rho\partial\varphi)^{-1}$ 是近似点映射.

当 $N(x,y) = x, \eta(x,y) = x-y, \forall x,y \in H$ 时, 算法 2.5 退化为求解变分不等式问题 (2.43) 的如下算法.

算法 2.8 给定 $x_0 \in H$, 变分不等式问题 (2.43) 的近似解 $\{x_n\}$ 由如下迭代方式确定:

$$
\begin{aligned}
z_n &= (1-c_n)x_n + c_n S\mathcal{P}_K[x_n - g(x_n) + J_\varphi(g(x_n) - \rho T(x_n))] + f_n \\
y_n &= (1-b_n)x_n + b_n S\mathcal{P}_K[z_n - g(z_n) + J_\varphi(g(z_n) - \rho T(z_n))] + e_n \\
x_{n+1} &= (1-a_n)x_n + a_n S\mathcal{P}_K[y_n - g(y_n) + J_\varphi(g(y_n) - \rho T(y_n))] + d_n
\end{aligned}
$$

其中, $a_n, b_n, c_n \in [0,1](n=0,1,2,\cdots)$, $d_n, e_n, f_n \in H(n=0,1,2,\cdots)$ 是扰动误差, $S: K \to K$ 是非扩张映射, $\mathcal{P}_K$ 是 H 到 K 上的投影算子, $J_\varphi = (I+\rho\partial\varphi)^{-1}$ 是近似点映射.

当 $N(x,y)=x$, $\eta(y,g(x))=y-g(x)$, $\forall\, x,y \in H$, 且对每一 $x \in H$, $\varphi(x)$ 是 K 的指示泛函时, 算法 2.5 退化为求解变分不等式问题 (2.44) 的如下算法.

算法 2.9　给定$x_0 \in H$, 变分不等式(2.5)的近似解$\{x_n\}$ 由如下迭代方式确定:

$$
\begin{aligned}
z_n &= (1-c_n)x_n + c_n S\mathcal{P}_K[x_n - g(x_n) + \mathcal{P}_K(g(x_n) - \rho T(x_n))] + f_n \\
y_n &= (1-b_n)x_n + b_n S\mathcal{P}_K[z_n - g(z_n) + \mathcal{P}_K(g(z_n) - \rho T(z_n))] + e_n \\
x_{n+1} &= (1-a_n)x_n + a_n S\mathcal{P}_K[y_n - g(y_n) + \mathcal{P}_K(g(y_n) - \rho T(y_n))] + d_n
\end{aligned}
$$

其中, $a_n, b_n, c_n \in [0,1](n=0,1,2,\cdots)$, $d_n, e_n, f_n \in H(n=0,1,2,\cdots)$ 是扰动误差, $S: K \to K$ 是非扩张映射, $\mathcal{P}_K$ 是 H 到 K 上的投影算子.

当 $N(x,y)=x$, $\eta(y,g(x))=y-g(x)$, $\forall\, x,y \in H$, $d_n=e_n=f_n\equiv 0(n=0,1,2,\cdots)$, g 为恒等映射, 且对每一 $x \in H$, $\varphi(x)$ 是 K 的指示泛函时, 算法 2.5 退化为求解变分不等式问题 (2.45) 的如下算法.

算法 2.10　给定 $x_0 \in K$, 变分不等式问题 (2.45) 的近似解序列 $\{x_n\}$ 由如下迭代方式确定:

$$
\begin{aligned}
z_n &= (1-c_n)x_n + c_n S\mathcal{P}_K[x_n - \rho T x_n] \\
y_n &= (1-b_n)x_n + b_n S\mathcal{P}_K[z_n - \rho T z_n] \\
x_{n+1} &= (1-a_n)x_n + a_n S\mathcal{P}_K[y_n - \rho T y_n]
\end{aligned}
$$

其中, $a_n, b_n, c_n \in [0,1](n=0,1,2,\cdots)$, $d_n, e_n, f_n \in H(n=0,1,2,\cdots)$ 是扰动误差, $S: K \to K$ 是非扩张映射, $\mathcal{P}_K$ 是 H 到 K 上的投影算子.

接下来我们讨论近似点-投影算法的强收敛性.

定理 2.5　设 K 是 Hilbert 空间 H 上的非空闭凸集, $N: H\times H \to H$ 在第一变元关于 T 为 β-强单调的和关于第一变元为 λ_1-Lipschitz 连续的, 关于第二变元为 λ_2-Lipschitz 连续的, $\eta: H\times H \to H$ 是 σ-强单调的和 δ-Lipschitz 连续的, 且满足假定 A. $T: H \to H$ 为 k_1-Lipschitz 连续的, $A: H \to H$ 为 k_2-Lipschitz 连续的, $g: H \to H$ 是松弛 (γ, r)-余强制的和 μ-Lipschitz 连续的, $S: K \to K$ 是非扩张映射且满足 $F(S) \cap \mathrm{GMVI}(N,\eta,\varphi) \neq \varnothing$. 如果

$$
a_n, b_n, c_n \in [0,1], \quad n=0,1,2,\cdots
$$

$$
\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \infty, \quad \sum_{n=0}^{\infty} \|d_n\| < \infty, \quad \sum_{n=0}^{\infty} \|e_n\| < \infty, \quad \sum_{n=0}^{\infty} \|f_n\| < \infty
$$

且满足以下条件:

$$2r < (2\gamma+1)\mu^2+1, \quad \xi=\sqrt{1+2\gamma\mu^2-2r+\mu^2}, \quad \tau=\delta/\sigma$$
$$\xi < \frac{1}{1+\tau}, \quad \lambda_1 k_1 > \lambda_2 k_2 \tag{2.51}$$

$$\frac{\lambda_2 k_2(1-(1+\tau)\xi)+\sqrt{(\lambda_1^2k_1^2-\lambda_2^2k_2^2)[\tau^2-(1-(1+\tau)\xi)^2]}}{\tau} < \beta < \lambda_1 k_1 \tag{2.52}$$

$$m_1 < \rho < m_2 \tag{2.53}$$

其中

$$m_1 = \frac{\beta\tau-\lambda_2k_2(1-(1+\tau)\xi)-\sqrt{[\beta\tau-\lambda_2k_2(1-(1+\tau)\xi)]^2-(\lambda_1^2k_1^2-\lambda_2^2k_2^2)[\tau^2-(1-(1+\tau)\xi)^2]}}{\tau(\lambda_1^2k_1^2-\lambda_2^2k_2^2)}$$

$$m_2=\min\{w_1,w_2\}$$

$$w_1 = \frac{\beta\tau-\lambda_2k_2(1-(1+\tau)\xi)+\sqrt{[\beta\tau-\lambda_2k_2(1-(1+\tau)\xi)]^2-(\lambda_1^2k_1^2-\lambda_2^2k_2^2)[\tau^2-(1-(1+\tau)\xi)^2]}}{\tau(\lambda_1^2k_1^2-\lambda_2^2k_2^2)}$$

$$w_2=\frac{1-(1+\tau)\xi}{\tau\lambda_2k_2}$$

则由算法 2.5 所生成的近似解序列 $\{x_n\}$ 强收敛于 $x^*\in F(S)\cap \mathrm{GMVI}(N,\eta,\varphi)$.

证明 设 $x^*\in F(S)\cap \mathrm{GMVI}(N,\eta,\varphi)$, 则

$$x^* = (1-c_n)x^*+c_nS\mathcal{P}_K[x^*-g(x^*)+J_\rho^\varphi(g(x^*)-\rho N(T(x^*),A(x^*))] \tag{2.54}$$
$$= (1-b_n)x^*+b_nS\mathcal{P}_K[x^*-g(x^*)+J_\rho^\varphi(g(x^*)-\rho N(T(x^*),A(x^*))] \tag{2.55}$$
$$= (1-a_n)x^*+a_nS\mathcal{P}_K[x^*-g(x^*)+J_\rho^\varphi(g(x^*)-\rho N(T(x^*),A(x^*))] \tag{2.56}$$

由式 (2.50), 式 (2.56), S, $\mathcal{P}_K$ 的非扩张性, 以及引理 1.9 有

$$\begin{aligned}
&\|x_{n+1}-x^*\| \\
=\ &\|(1-a_n)(x_n-x^*)+a_n(S\mathcal{P}_K[y_n-g(y_n)+J_\rho^\varphi(g(y_n)-\rho N(T(y_n),A(y_n)))] \\
&-S\mathcal{P}_K[x^*-g(x^*)+J_\rho^\varphi(g(x^*)-\rho N(T(x^*),A(x^*)))])\|+\|d_n\| \\
\leqslant\ &(1-a_n)\|x_n-x^*\|+a_n\|y_n-g(y_n)+J_\rho^\varphi(g(y_n)-\rho N(T(y_n),A(y_n))) \\
&-x^*+g(x^*)-J_\rho^\varphi(g(x^*)-\rho N(T(x^*),A(x^*)))\|+\|d_n\| \\
\leqslant\ &(1-a_n)\|x_n-x^*\|+a_n\|y_n-x^*-g(y_n)+g(x^*)\|
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+a_n\|J_\rho^\varphi(g(y_n)-\rho N(T(y_n),A(y_n)))-J_\rho^\varphi(g(x^*)-\rho N(T(x^*),A(x^*)))\|+\|d_n\|\\
&\leqslant(1-a_n)\|x_n-x^*\|+a_n\|y_n-x^*-g(y_n)+g(x^*)\|\\
&\quad+a_n\tau\|g(y_n)-\rho N(T(y_n),A(y_n))-g(x^*)+\rho N(T(x^*),A(x^*))\|+\|d_n\|\\
&\leqslant(1-a_n)\|x_n-x^*\|+a_n(1+\tau)\|(y_n-x^*)-(g(y_n)-g(x^*))\|\\
&\quad+a_n\tau\|y_n-x^*-\rho(N(T(y_n),A(y_n))-N(T(x^*),A(x^*)))\|+\|d_n\| \qquad (2.57)
\end{aligned}
$$

由 g 的松弛 (γ,r)-余强制性及 μ-Lipschitz 连续性有

$$
\begin{aligned}
&\|y_n-x^*-(g(y_n)-g(x^*))\|^2\\
&=\|y_n-x^*\|^2-2\langle g(y_n)-g(x^*),y_n-x^*\rangle+\|g(y_n)-g(x^*)\|^2\\
&\leqslant\|y_n-x^*\|^2-2[-\gamma\|g(y_n)-g(x^*)\|^2+r\|y_n-x^*\|^2]+\|g(y_n)-g(x^*)\|^2\\
&\leqslant\|y_n-x^*\|^2+2\gamma\mu^2\|y_n-x^*\|^2-2r\|y_n-x^*\|^2+\mu^2\|y_n-x^*\|^2\\
&=[1+2\gamma\mu^2-2r+\mu^2]\|y_n-x^*\|^2 \qquad (2.58)
\end{aligned}
$$

又

$$
\begin{aligned}
&\|y_n-x^*-\rho(N(T(y_n),A(y_n))-N(T(x^*),A(x^*)))\|\\
&=\|y_n-x^*-\rho(N(T(y_n),A(y_n))-N(T(x^*),A(y_n)))\\
&\quad-\rho(N(T(x^*),A(y_n))-N(T(x^*),A(x^*)))\|\\
&\leqslant\|y_n-x^*-\rho(N(T(y_n),A(y_n))-N(T(x^*),A(y_n)))\|\\
&\quad+\rho\|(N(T(x^*),A(y_n))-N(T(x^*),A(x^*)))\| \qquad (2.59)
\end{aligned}
$$

由 N, T, A 的 Lipschitz 连续性和 N 的强单调性有

$$
\begin{aligned}
&\|y_n-x^*-\rho(N(T(y_n),A(y_n))-N(T(x^*),A(y_n)))\|^2\\
&=\|y_n-x^*\|^2-2\rho\langle y_n-x^*,N(T(y_n),A(y_n))-N(T(x^*),A(y_n))\rangle\\
&\quad+\rho^2\|N(T(y_n),A(y_n))-N(T(x^*),A(y_n))\|^2\\
&\leqslant\|y_n-x^*\|^2-2\beta\rho\|y_n-x^*\|^2+\lambda_1^2\rho^2\|T(y_n)-T(x^*)\|^2\\
&\leqslant\|y_n-x^*\|^2-2\beta\rho\|y_n-x^*\|^2+\lambda_1^2k_1^2\rho^2\|y_n-x^*\|^2\\
&=(1-2\beta\rho+\lambda_1^2k_1^2\rho^2)\|y_n-x^*\|^2 \qquad (2.60)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\|N(T(x^*),A(y_n))-N(T(x^*),A(x^*))\|&\leqslant\lambda_2\|A(y_n)-A(x^*)\|\\
&\leqslant\lambda_2k_2\|y_n-x^*\| \qquad (2.61)
\end{aligned}
$$

由式 (2.57)~式 (2.61) 有

$$
\|x_{n+1}-x^*\|\leqslant(1-a_n)\|x_n-x^*\|+a_n\theta\|y_n-x^*\|+\|d_n\| \qquad (2.62)
$$

其中

$$\theta = (1+\tau)\sqrt{1+2\gamma\mu^2-2r+\mu^2}+\tau\sqrt{1-2\beta\rho+\lambda_1^2k_1^2\rho^2}+\tau\rho\lambda_2k_2 \tag{2.63}$$

由式 (2.51)~式 (2.53) 有 $\theta<1$.

由式 (2.49), 式 (2.55), S, $\mathcal{P}_K$ 的非扩张性, 以及引理 1.9 有

$$\begin{aligned}
&\|y_n-x^*\|\\
=&\|(1-b_n)(x_n-x^*)+b_n(S\mathcal{P}_K[z_n-g(z_n)+J_\rho^\varphi(g(z_n)-\rho N(T(z_n),A(z_n)))]\\
&-S\mathcal{P}_K[x^*-g(x^*)+J_\rho^\varphi(g(x^*)-\rho N(T(x^*),A(x^*)))])\|+\|e_n\|\\
\leqslant&(1-b_n)\|x_n-x^*\|+b_n\|z_n-g(z_n)+J_\rho^\varphi(g(z_n)-\rho N(T(z_n),A(z_n)))\\
&-x^*+g(x^*)-J_\rho^\varphi(g(x^*)-\rho N(T(x^*),A(x^*)))\|+\|e_n\|\\
\leqslant&(1-b_n)\|x_n-x^*\|+b_n\|z_n-x^*-g(z_n)+g(x^*)\|\\
&+b_n\|J_\rho^\varphi(g(z_n)-\rho N(T(z_n),A(z_n)))-J_\rho^\varphi(g(x^*)-\rho N(T(x^*),A(x^*)))\|+\|e_n\|\\
\leqslant&(1-b_n)\|x_n-x^*\|+b_n\|z_n-x^*-g(z_n)+g(x^*)\|\\
&+b_n\tau\|g(z_n)-\rho N(T(z_n),A(z_n))-g(x^*)+\rho N(T(x^*),A(x^*))\|+\|e_n\|\\
\leqslant&(1-b_n)\|x_n-x^*\|+b_n(1+\tau)\|(z_n-x^*)-(g(z_n)-g(x^*))\|\\
&+b_n\tau\|z_n-x^*-\rho(N(T(z_n),A(z_n))-N(T(x^*),A(x^*)))\|+\|e_n\|
\end{aligned} \tag{2.64}$$

由 g 的松弛 (γ,r)-余强制性及 μ-Lipschitz 连续性有

$$\begin{aligned}
&\|z_n-x^*-(g(z_n)-g(x^*))\|^2\\
=&\|z_n-x^*\|^2-2\langle g(z_n)-g(x^*),z_n-x^*\rangle+\|g(z_n)-g(x^*)\|^2\\
\leqslant&\|z_n-x^*\|^2-2[-\gamma\|g(z_n)-g(x^*)\|^2+r\|z_n-x^*\|^2]+\|g(z_n)-g(x^*)\|^2\\
\leqslant&\|z_n-x^*\|^2+2\gamma\mu^2\|z_n-x^*\|^2-2r\|z_n-x^*\|^2+\mu^2\|z_n-x^*\|^2\\
=&[1+2\gamma\mu^2-2r+\mu^2]\|z_n-x^*\|^2
\end{aligned} \tag{2.65}$$

又

$$\begin{aligned}
&\|z_n-x^*-\rho(N(T(z_n),A(z_n))-N(T(x^*),A(x^*)))\|\\
=&\|z_n-x^*-\rho(N(T(z_n),A(z_n))-N(T(x^*),A(z_n)))\\
&-\rho(N(T(x^*),A(z_n))-N(T(x^*),A(x^*)))\|\\
\leqslant&\|z_n-x^*-\rho(N(T(z_n),A(z_n))-N(T(x^*),A(z_n)))\|\\
&+\rho\|(N(T(x^*),A(z_n))-N(T(x^*),A(x^*)))\|
\end{aligned} \tag{2.66}$$

由 N, T, A 的 Lipschitz 连续性和 N 的强单调性有

$$
\begin{aligned}
&\|z_n - x^* - \rho(N(T(z_n), A(z_n)) - N(T(x^*), A(z_n)))\|^2 \\
=& \|z_n - x^*\|^2 - 2\rho\langle z_n - x^*, N(T(z_n), A(z_n)) - N(T(x^*), A(z_n))\rangle \\
&+\rho^2\|N(T(z_n), A(z_n)) - N(T(x^*), A(z_n))\|^2 \\
\leqslant& \|z_n - x^*\|^2 - 2\beta\rho\|z_n - x^*\|^2 + \lambda_1^2\rho^2\|T(z_n) - T(x^*)\|^2 \\
\leqslant& \|z_n - x^*\|^2 - 2\beta\rho\|z_n - x^*\|^2 + \lambda_1^2 k_1^2\rho^2\|z_n - x^*\|^2 \\
=& (1 - 2\beta\rho + \lambda_1^2 k_1^2 \rho^2)\|z_n - x^*\|^2
\end{aligned}
\tag{2.67}
$$

$$
\begin{aligned}
\|N(T(x^*), A(z_n)) - N(T(x^*), A(x^*))\| &\leqslant \lambda_2\|A(z_n) - A(x^*)\| \\
&\leqslant \lambda_2 k_2\|z_n - x^*\|
\end{aligned}
\tag{2.68}
$$

由式 (2.63)~式 (2.68) 有

$$
\|y_n - x^*\| \leqslant (1 - b_n)\|x_n - x^*\| + b_n\theta\|z_n - x^*\| + \|e_n\| \tag{2.69}
$$

同理, 由式 (2.48) 和式 (2.54) 有

$$
\begin{aligned}
\|z_n - x^*\| &\leqslant (1 - c_n)\|x_n - x^*\| + c_n\theta\|x_n - x^*\| + \|f_n\| \\
&= [1 - c_n(1 - \theta)]\|x_n - x^*\| + \|f_n\| \leqslant \|x_n - x^*\| + \|f_n\|
\end{aligned}
\tag{2.70}
$$

由式 (2.69) 和式 (2.70) 有

$$
\begin{aligned}
\|y_n - x^*\| &\leqslant (1 - b_n)\|x_n - x^*\| + b_n\theta\|x_n - x^*\| + b_n\theta\|f_n\| + \|e_n\| \\
&= [1 - b_n(1 - \theta)]\|x_n - x^*\| + b_n\theta\|f_n\| + \|e_n\| \\
&\leqslant \|x_n - x^*\| + b_n\theta\|f_n\| + \|e_n\|
\end{aligned}
\tag{2.71}
$$

由式 (2.62) 和式 (2.27) 有

$$
\begin{aligned}
\|x_{n+1} - x^*\| &\leqslant (1 - a_n)\|x_n - x^*\| + a_n\theta\|y_n - x^*\| + \|d_n\| \\
&\leqslant (1 - a_n)\|x_n - x^*\| + a_n\theta\|x_n - x^*\| \\
&\quad +a_n b_n\theta^2\|f_n\| + a_n\theta\|e_n\| + \|d_n\| \\
&= [1 - a_n(1 - \theta)]\|x_n - x^*\| + a_n b_n\theta^2\|f_n\| \\
&\quad +a_n\theta\|e_n\| + \|d_n\| \\
&\leqslant [1 - a_n(1 - \theta)]\|x_n - x^*\| \\
&\quad +\|f_n\| + \|e_n\| + \|d_n\|
\end{aligned}
\tag{2.72}
$$

由式 (2.72) 和引理 1.11 有

$$\lim_{n\to\infty}\|x_n - x^*\| = 0$$

所以 $x_n \to x^*(n\to\infty)$.

注解 2.1 下面的例子说明了式 (2.51)~式 (2.53) 的各正常数的存在性:

对 $\forall x, y \in H$, 令 $N(x,y) = x-y, \eta(x,y) = x-y, Tx = \frac{34}{5}x, Ax = \frac{1}{2}x, g(x) = x$, 则有

(i) N 在第一变元关于 T 为 β-强单调的和关于第一变元为 λ_1-Lipschitz 连续的, 关于第二变元为 λ_2-Lipschitz 连续的, 其中 $\beta = \frac{27}{4}, \lambda_1 = \lambda_2 = 1$;

(ii) η 为 τ-Lipschitz 连续的, 其中 $\tau = 1$;

(iii) T 为 k_1-Lipschitz 连续的, A 为 k_2-Lipschitz 连续的, 其中 $k_1 = 7, k_2 = 1$;

(iv) g 松弛 (γ, r)-余强制的和 μ-Lipschitz 连续的, 其中 $\gamma = \frac{1}{32}, r = 1, \mu = 1$.

此时式 (2.51) 和式 (2.52) 成立, 且通过简单计算可知, 式 (2.53) 变为 $\frac{3}{32} < \rho < \frac{1}{6}$, 此即蕴含 $\theta \in (0,1)$.

当 $N(x,y) = x, \eta(y, g(x)) = y - g(x), \forall x, y \in H$, 且对每一 $x \in H, \varphi(x)$ 是 K 的指示泛函时, 就得到算法 2.9 的收敛性证明.

定理 2.6 设 K 是 Hilbert 空间 H 上的非空闭凸集, $T: H \to H$ 是松弛 (γ, r)-余强制的和 μ-Lipschitz 连续的, $g: H \to H$ 是松弛 (γ_1, r_1)-余强制的和 μ_1-Lipschitz 连续的, $S: K \to K$ 是非扩张映射且满足 $F(S) \cap \mathrm{GVI}(K,T,g) \neq \varnothing$, 其中 $\mathrm{GVI}(K,T,g)$ 表示变分不等式问题 (2.44) 的解集合. 如果

$$a_n, b_n, c_n \in [0,1], \quad n = 0,1,2,\cdots$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \infty, \quad \sum_{n=0}^{\infty} \|d_n\| < \infty, \quad \sum_{n=0}^{\infty} \|e_n\| < \infty, \quad \sum_{n=0}^{\infty} \|f_n\| < \infty$$

且满足以下条件:

$$2r_1 < (2\gamma_1 + 1)\mu_1^2 + 1, \quad \xi < 1, \quad \gamma\mu^2 + \mu\sqrt{\xi(2-\xi)} < r < \gamma\mu^2 + \mu \tag{2.73}$$

$$|\rho - \frac{r - \gamma\mu^2}{\mu^2}| < \frac{\sqrt{(r-\gamma\mu^2)^2 - \mu^2\xi(2-\xi)}}{\mu^2} \tag{2.74}$$

其中

$$\xi = 2\sqrt{1 + 2\gamma_1\mu_1^2 - 2r_1 + \mu_1^2}$$

则由算法 2.9 所生成的近似解序列 $\{x_n\}$ 强收敛于 $x^* \in F(S) \cap \mathrm{GVI}(K, T, g)$.

当 $N(x,y) = x, \eta(y, g(x)) = y - g(x), \forall x, y \in H$, $d_n = e_n = f_n \equiv 0(n = 0, 1, 2, \cdots)$, g 为恒等映射, 且对每一 $x \in H, \varphi(x)$ 是 K 的指示泛函时, 就得到算法 2.10 的收敛性证明.

定理 2.7　设 K 是 H 上的非空闭凸集, $T: H \to H$ 是松弛 (γ, r)-余强制的和 μ-Lipschitz 连续的, $S: K \to K$ 是非扩张映射且满足 $F(S) \cap \mathrm{VI}(T, K) \neq \varnothing$, 其中 $\mathrm{VI}(T, K)$ 表示经典变分不等式问题 (2.44) 的解集合. 如果

$$a_n, b_n, c_n \in [0, 1], \quad n = 0, 1, 2, \cdots, \quad \sum_{n=0}^{\infty} a_n = \infty$$

且满足以下条件:

$$0 < \rho < 2(r - \gamma\mu^2)/\mu^2, \quad \gamma\mu^2 < r$$

则由算法 2.10 所生成的迭代序列 $\{x_n\}$ 强收敛于 $x^* \in F(S) \cap \mathrm{VI}(T, K)$.

2.3　辅助函数迭代法

设 H 为实 Hilbert 空间, 其内积和范数分别记为 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ 和 $\|\cdot\|$, $\mathrm{CB}(H)$ 表示 H 的一切非空有界闭子集, K 是 H 上的非空闭凸集. 设 $T, A: H \to \mathrm{CB}(H)$ 是两个多值映射, $h: H \to H$ 及 $g: K \to K$ 均为单值映射, $\varphi(\cdot, \cdot): H \times H \to (-\infty, +\infty]$ 是二元泛函.

给定三元算子 $F(\cdot, \cdot, \cdot): K \times K \times K \to H$, 考虑如下带有三元算子的广义混合拟平衡问题 (简记为 QVIP): 求 $u \in K, \nu \in T(u), \mu \in A(u)$ 使得

$$F(\mu, \nu, g(v)) + \varphi(g(v), g(u)) - \varphi(g(u), g(u)) \geqslant 0, \quad \forall v \in K \tag{2.75}$$

问题 QVIP 包含了以下一些特殊情形:

(i) 当 A, g 均为恒等映射时, 式 (2.75) 退化为: 求 $u \in K$, $\nu \in T(u)$ 使得

$$F(u, \nu, v) + \varphi(v, u) - \varphi(u, u) \geqslant 0, \quad \forall v \in K \tag{2.76}$$

(ii) 当 A, g 均为恒等映射且 $F(u, \nu, v) = \langle \nu, v - u \rangle$ 时, 式 (2.75) 退化为: 求 $u \in K$, $\nu \in T(u)$ 使得

$$\langle \nu, v - u \rangle + \varphi(v, u) - \varphi(u, u) \geqslant 0, \quad \forall v \in K \tag{2.77}$$

总之, 适当选择映射 F, T, A, g, 就可以获得许多新的和已知的变分不等式作为特例.

下面介绍问题 QVIP 的辅助函数迭代算法.

给定 $u\in K$, 考虑如下辅助变分不等式问题: 求 $w\in K,\mu\in A(w),\nu\in T(w)$ 使得

$$
\begin{aligned}
&\langle h(w)-h(u),h(v)-h(w)\rangle+\rho F(\mu,\nu,g(v))\\
&+\rho\varphi(g(v),g(w))-\rho\varphi(g(w),g(w))\geqslant 0,\quad \forall v\in K
\end{aligned}
\tag{2.78}
$$

其中, $\rho>0$ 是常数.

可以观察到, 如果 $w=u$, 那么 (u,μ,ν) 是问题 QVIP 的一个解, 从而有如下迭代算法.

算法 2.11 给定 $u_0\in K,s_0\in A(u_0),t_0\in T(u_0)$, 则问题 QVIP 的近似解 (u_n,s_n,t_n) 由如下方式确定:

$$
\begin{aligned}
&\langle h(u_{n+1})-h(u_n),h(v)-h(u_{n+1})\rangle+\rho F(s_{n+1},t_{n+1},g(v))\\
&+\rho\varphi(g(v),g(u_{n+1}))-\rho\varphi(g(u_{n+1}),g(u_{n+1}))\geqslant 0,\quad \forall v\in K
\end{aligned}
\tag{2.79}
$$

$$
s_n\in A(u_n),\quad \|s_{n+1}-s_n\|\leqslant\left(1+\frac{1}{n+1}\right)D(A(u_{n+1}),A(u_n))
\tag{2.80}
$$

$$
t_n\in T(u_n),\quad \|t_{n+1}-t_n\|\leqslant\left(1+\frac{1}{n+1}\right)D(T(u_{n+1}),T(u_n))
\tag{2.81}
$$

其中, $\rho>0$ 是常数, D 是 $CB(H)$ 上的 Hausdorff 度量.

如果A,g均为恒等映射, 那么算法2.11退化为求解平衡问题 (2.76) 的如下算法.

算法 2.12 给定 $u_0\in K,t_0\in T(u_0)$, 则问题 (2.76) 的近似解 (u_n,t_n) 由如下方式确定:

$$
\begin{aligned}
&\langle h(u_{n+1})-h(u_n),h(v)-h(u_{n+1})\rangle+\rho F(u_{n+1},t_{n+1},v)\\
&+\rho\varphi(v,u_{n+1})-\rho\varphi(u_{n+1},u_{n+1})\geqslant 0,\quad \forall v\in K\\
&\quad t_n\in T(u_n),\quad \|t_{n+1}-t_n\|\leqslant D(T(u_{n+1}),T(u_n))
\end{aligned}
$$

其中, $\rho>0$ 是常数, D 是 $CB(H)$ 上的 Hausdorff 度量.

如果 A,g 均为恒等映射且 $F(u,t,v)=\langle t,v-u\rangle$, 那么算法 2.11 退化为求解问题 (2.77) 的如下算法.

算法 2.13 给定 $u_0\in K,t_0\in T(u_0)$, 则问题 1.4 的近似解 (u_n,t_n) 由如下方式确定:

$$
\begin{aligned}
&\langle h(u_{n+1})-h(u_n),h(v)-h(u_{n+1})\rangle+\rho\langle t_{n+1},v-u_{n+1}\rangle\\
&+\rho\varphi(v,u_{n+1})-\rho\varphi(u_{n+1},u_{n+1})\geqslant 0,\quad \forall v\in K\\
&\quad t_n\in T(u_n),\quad \|t_{n+1}-t_n\|\leqslant D(T(u_{n+1}),T(u_n))
\end{aligned}
$$

其中, $\rho > 0$ 是常数, D 是 $\mathrm{CB}(H)$ 上的 Hausdorff 度量.

下面的结论在证明算法 2.11 的强收敛性中起着关键的作用.

定理 2.8　设 (u, μ, ν) 是平衡问题 QVIP 的一个解, (u_n, μ_n, ν_n) 是由算法 2.11 生成的近似解序列, 如果下述条件成立:

(i) $\varphi(\cdot,\cdot): H \times H \to (-\infty, +\infty]$ 是斜对称的;

(ii) $F(\cdot,\cdot,\cdot): K \times K \times K \to H$ 与映射 T 及 A 关于 $\varphi(\cdot,\cdot)$ 为 g-联合伪单调的, 则有

$$\|h(u_{n+1}) - h(u)\|^2 \leqslant \|h(u_n) - h(u)\|^2 - \|h(u_{n+1}) - h(u_n)\|^2 \tag{2.82}$$

证明　设 (u, μ, ν) 是平衡问题 QVIP 的一个解, 则 $\nu \in T(u)$, $\mu \in A(u)$ 且

$$F(\mu, \nu, g(v)) + \varphi(g(v), g(u)) - \varphi(g(u), g(u)) \geqslant 0, \quad \forall v \in K$$

由 $F(\cdot,\cdot,\cdot)$ 与映射 T 及 A 关于 $\varphi(\cdot,\cdot)$ 的 g-联合伪单调性, 有

$$-F(s, t, g(u)) + \varphi(g(v), g(u)) - \varphi(g(u), g(u)) \geqslant 0, \quad \forall v \in K, s \in A(v), t \in T(v) \tag{2.83}$$

分别在式 (2.83) 和式 (2.79) 中令 $v = u_{n+1}$ 及 $v = u$ 得

$$-\rho F(s_{n+1}, t_{n+1}, g(u)) + \rho\varphi(g(u_{n+1}), g(u)) - \rho\varphi(g(u), g(u)) \geqslant 0 \tag{2.84}$$

$$\begin{aligned}&\langle h(u_{n+1}) - h(u_n), h(u) - h(u_{n+1})\rangle + \rho F(s_{n+1}, t_{n+1}, g(u)) \\ &+\rho\varphi(g(u), g(u_{n+1})) - \rho\varphi(g(u_{n+1}), g(u_{n+1})) \geqslant 0\end{aligned} \tag{2.85}$$

由式 (2.84) 和式 (2.85) 及 $\varphi(\cdot,\cdot)$ 的斜对称性有

$$\begin{aligned}&\langle h(u_{n+1}) - h(u_n), h(u) - h(u_{n+1})\rangle \\ &\geqslant -\rho F(s_{n+1}, t_{n+1}, g(u)) - \rho\varphi(g(u), g(u_{n+1})) + \rho\varphi(g(u_{n+1}), g(u_{n+1})) \\ &\geqslant \rho\varphi(g(u_{n+1}), g(u_{n+1})) - \rho\varphi(g(u), g(u_{n+1})) - \rho\varphi(g(u_{n+1}), g(u)) + \rho\varphi(g(u), g(u)) \\ &= \rho(\varphi(g(u_{n+1}), g(u_{n+1})) - \varphi(g(u), g(u_{n+1})) \\ &\quad -\varphi(g(u_{n+1}), g(u)) + \varphi(g(u), g(u))) \geqslant 0\end{aligned} \tag{2.86}$$

根据式 (2.10) 有

$$\begin{aligned}2\langle h(u_{n+1}) - h(u_n), h(u) - h(u_{n+1})\rangle = &\|h(u) - h(u_n)\|^2 - \|h(u) - h(u_{n+1})\|^2 \\ &-\|h(u_n) - h(u_{n+1})\|^2\end{aligned} \tag{2.87}$$

由式 (2.86) 和式 (2.87) 有

$$\|h(u_{n+1}) - h(u)\|^2 \leqslant \|h(u_n) - h(u)\|^2 - \|h(u_{n+1}) - h(u_n)\|^2$$

定理 2.9 设 H 为有限维 Hilbert 空间, 如果下述条件成立:

(i) $h: H \to H$ 是连续且 δ-强单调的单值映射;

(ii) $F(\cdot,\cdot,\cdot): K \times K \times K \to H$ 及 $g: K \to K$ 均为连续的单值映射;

(iii) $\varphi(\cdot,\cdot): H \times H \to (-\infty, +\infty]$ 是斜对称的连续泛函;

(iv) $T, A: H \to \mathrm{CB}(H)$ 均为M-Lipschitz的多值映射, 且分别具有常数γ_1和 γ_2;

(v) $F(\cdot,\cdot,\cdot): K \times K \times K \to H$ 与映射 T 及 A 关于 $\varphi(\cdot,\cdot)$ 为 g-联合伪单调的.

若平衡问题 QVIP 的解集非空, 则由算法 2.11 生成的迭代序列 $\{u_n\}$, $\{s_n\}$, $\{t_n\}$ 强收敛于平衡问题 QVIP 的一个解 (u^*, s^*, t^*).

证明 对问题 QVIP 的任意一解 (u, μ, ν), 根据式 (2.82) 可知: 序列 $\{\|h(u_n) - h(u)\|\}$ 有界, 且有

$$\sum_{n=0}^{\infty} \|h(u_{n+1}) - h(u_n)\|^2 \leqslant \|h(u_0) - h(u)\|^2 \tag{2.88}$$

由式 (2.88) 可得

$$\|h(u_{n+1}) - h(u_n)\| \to 0, \quad n \to \infty$$

由 h 的强单调性知

$$\|u_{n+1} - u_n\| \to 0, \quad n \to \infty \tag{2.89}$$

由于 $\{\|h(u_n) - h(u)\|\}$ 有界, 从而 $\{u_n\}$ 有界, 故存在子序列 $\{u_{n_i}\}$ 使得 $u_{n_i} \to u^*$.

因 T, A 均是 M-Lipschitz 连续的, 由引理 1.15 可知, T, A 均上半连续, 又由引理 1.16 可知, 序列 $\{s_{n_i}\}$ 和 $\{t_{n_i}\}$ 分别存在子序列 $\{s_{n_j}\}$ 和 $\{t_{n_j}\}$, 使得 $s_{n_j} \to s^*, t_{n_j} \to t^*, s^* \in A(u^*), t^* \in T(u^*)$.

由式 (2.79) 有

$$\begin{aligned}&\langle h(u_{n_j+1}) - h(u_{n_j}), h(v) - h(u_{n_j+1})\rangle + \rho F(s_{n_j+1}, t_{n_j+1}, g(v))\\&+\rho\varphi(g(v), g(u_{n_j+1})) - \rho\varphi(g(u_{n_j+1}), g(u_{n_j+1})) \geqslant 0, \quad \forall v \in K\end{aligned} \tag{2.90}$$

在式 (2.90) 中令 $j \to \infty$ 得

$$\begin{aligned}&\langle h(u^*) - h(u^*), h(v) - h(u^*)\rangle + \rho F(s^*, t^*, g(v)) + \rho\varphi(g(v), g(u^*))\\&-\rho\varphi(g(u^*), g(u^*)) \geqslant 0, \quad \forall v \in K\end{aligned}$$

从而有

$$F(s^*, t^*, g(v)) + \varphi(g(v), g(u^*)) - \varphi(g(u^*), g(u^*)) \geqslant 0, \quad \forall v \in K$$

从而 (u^*, s^*, t^*) 是问题 QVIP 的一个解.

由式 (2.82), 对任何 n 有

$$\|h(u_n) - h(u^*)\| \leqslant \|h(u_{n_i}) - h(u^*)\| \to 0, \quad i \to \infty$$

由 h 的强单调性有

$$u_n \to u^*, \quad n \to \infty$$

由式 (2.80) 和式 (2.89) 以及 A 的 M-Lipschitz 连续性有

$$\begin{aligned}\|s_{n+1} - s_n\| &\leqslant \left(1 + \frac{1}{n+1}\right) M(A(u_{n+1}), A(u_n)) \\ &\leqslant \gamma_2 \left(1 + \frac{1}{n+1}\right) \|u_{n+1} - u_n\| \to 0, \quad n \to \infty\end{aligned}$$

由此可得

$$\begin{aligned}\|s_n - s^*\| \leqslant &\|s_n - s_{n+1}\| + \|s_{n+1} - s_{n+2}\| + \cdots \\ &+ \|s_{n_j-1} - s_{n_j}\| + \|s_{n_j} - s^*\| \to 0, \quad n \to \infty\end{aligned}$$

从而

$$s_n \to s^*, \quad n \to \infty$$

类似可证明

$$t_n \to t^*, \quad n \to \infty$$

证毕.

第3章　变分不等式与不动点问题

本章首先介绍了求解经典变分不等式问题的两步和三步投影迭代法, 并在映射是余强制的假定下，证明了由算法所生成迭代序列强收敛于非扩张映射不动点集合与变分不等式解集合的公共元素. 然后在所涉及映射是单调和连续的假定下, 证明了算法所产生的序列强收敛到变分不等式问题的解集与一族可数无限非扩张映射不动点集合的公共元素. 最后，在所涉及映射是单调和不动点映射是严格伪压缩的假定下, 提出了求解经典变分不等式问题的两个不同的次梯度超梯度算法，并证明了由算法所生成迭代序列分别强 (弱) 收敛于严格伪压缩映射不动点集合与变分不等式解集合的公共元素.

设 H 为实 Hilbert 空间, 其内积和范数分别记为 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 和 $\|\cdot\|$,K 是 H 上的非空闭凸集. 设 $T:K\to H$ 为单值映射,$\mathcal{P}_K$ 表示 H 到 K 上的投影算子.

考虑如下变分不等式问题：求 $u\in K$ 使得

$$\langle Tu, v-u\rangle \geqslant 0, \quad \forall v\in K \tag{3.1}$$

用 $\mathrm{VI}(T,K)$ 表示变分不等式问题 (3.1) 的解集合.

引理 3.1　设 $T:K\to H$ 是单调映射, $N_K(v):=\{w\in H:\langle w, v-u\rangle\geqslant 0, \forall u\in K\}$ 为 K 上的正规锥. 定义

$$Av=\begin{cases} Tv+N_K(v), & v\in K\\ \varnothing, & \text{其他}\end{cases}$$

则 A 极大单调且 $0\in Av$ 当且仅当 $v\in\mathrm{VI}(T,K)$.

3.1　一般非扩张映射的不动点

设 $S:K\to K$ 为非扩张映射，用 $F(S)$ 表示非扩张映射 S 不动点全体组成的集合. 下面的结果表明，由两步迭代算法所生成迭代序列强收敛于非扩张映射不动点集合 $F(S)$ 与变分不等式解集合 $\mathrm{VI}(T,K)$ 的公共元素.

定理 3.2　设 K 是实 Hilbert 空间 H 上的非空闭凸集, $T:K\to H$ 是 α-余强制的, $S:K\to K$ 是非扩张的且 $\mathrm{VI}(T,K)\cap F(S)\neq\varnothing$. 给定 $u\in K$ 和 $x_0\in K$, 序

列 $\{x_n\}, \{y_n\}$ 和 $\{z_n\}$ 由以下算法产生:

$$\begin{cases} y_n = \beta_n x_n + (1-\beta_n) S\mathcal{P}_K(x_n - \lambda_n T x_n) \\ x_{n+1} = \alpha_n x_n + (1-\alpha_n) S(\gamma_n u + (1-\gamma_n)\mathcal{P}_K(y_n - \lambda_n T y_n)), \quad n \geqslant 0 \end{cases} \tag{3.2}$$

其中, $\{\alpha_n\}, \{\beta_n\}, \{\gamma_n\}$ 和 $\{\mu_n\}$ 均为定义在 $[0,1]$ 内的序列,$\{\lambda_n\}$ 满足 $\lambda_n \in [a,b](0 < a < b < 2\alpha)$.

如果

(i) $0 < \liminf_{n\to\infty} \alpha_n \leqslant \limsup_{n\to\infty} \alpha_n < 1$;

(ii) $\lim_{n\to\infty} \gamma_n = 0, \sum_{n=0}^{\infty} \gamma_n = \infty$;

(iii) $\lim_{n\to\infty} \beta_n = 1, \lim_{n\to\infty} (\lambda_{n+1} - \lambda_n) = 0$.

则由式 (3.2) 所产生的序列 $\{x_n\}$ 强收敛于 $\mathcal{P}_{\mathrm{VI}(T,K)\cap F(S)} u$.

证明　设 $x^* \in \mathrm{VI}(T,K) \cap F(S)$, 则 $x^* = \mathcal{P}_K(x^* - \lambda_n T x^*)$. 令 $P_n := \mathcal{P}_K(x_n - \lambda_n T x_n)$ 和 $R_n := \mathcal{P}_K(y_n - \lambda_n T y_n)(\forall n \geqslant 0)$. 下面分五步来证明.

第一步: 序列 $\{x_n\}$ 有界.

由式 (3.2) 和引理 1.23 有

$$\begin{aligned} \|P_n - x^*\| &= \|\mathcal{P}_K(x_n - \lambda_n T x_n) - \mathcal{P}_K(x^* - \lambda_n T x^*)\| \\ &\leqslant \|(x_n - \lambda_n T x_n) - (x^* - \lambda_n T x^*)\| \\ &\leqslant \|x_n - x^*\| \end{aligned} \tag{3.3}$$

同理可证

$$\|R_n - x^*\| \leqslant \|y_n - x^*\| \tag{3.4}$$

由式 (3.3) 有

$$\begin{aligned} \|y_n - x^*\| &= \|\beta_n (x_n - x^*) + (1-\beta_n)(SP_n - x^*)\| \\ &\leqslant \beta_n \|x_n - x^*\| + (1-\beta_n)\|SP_n - Sx^*\| \\ &\leqslant \beta_n \|x_n - x^*\| + (1-\beta_n)\|P_n - x^*\| \\ &\leqslant \|x_n - x^*\| \end{aligned} \tag{3.5}$$

所以, 由式 (3.4) 和式 (3.5) 有

$$\begin{aligned}\|x_{n+1}-x^*\| &= \|\alpha_n(x_n-x^*)+(1-\alpha_n)(S(\gamma_n u+(1-\gamma_n)R_n)-x^*)\| \\ &\leqslant \alpha_n\|x_n-x^*\|+(1-\alpha_n)(\gamma_n\|u-x^*\|+(1-\gamma_n)\|R_n-x^*\|) \\ &\leqslant (1-\alpha_n)\gamma_n\|u-x^*\|+(1-(1-\alpha_n)\gamma_n)\|x_n-x^*\| \\ &\leqslant \max\{\|u-x^*\|,\|x_0-x^*\|\}\end{aligned}$$

因而 $\{x_n\}$ 有界, 从而 $\{P_n\},\{R_n\},\{SP_n\},\{SR_n\},\{Tx_n\}$ 和 $\{Ty_n\}$ 均有界.

第二步: $\lim\limits_{n\to\infty}\|x_{n+1}-x_n\|=0$. 由 $I-\lambda_n T$ 的非扩张性有

$$\begin{aligned}\|P_{n+1}-P_n\| &= \|\mathcal{P}_K(x_{n+1}-\lambda_{n+1}Tx_{n+1})-\mathcal{P}_K(x_n-\lambda_n Tx_n)\| \\ &\leqslant \|(x_{n+1}-\lambda_{n+1}Tx_{n+1})-(x_n-\lambda_n Tx_n)\| \\ &= \|(x_{n+1}-\lambda_{n+1}Tx_{n+1})-(x_n-\lambda_{n+1}Tx_n)+(\lambda_n-\lambda_{n+1})Tx_n\| \\ &\leqslant \|(x_{n+1}-\lambda_{n+1}Tx_{n+1})-(x_n-\lambda_{n+1}Tx_n)\| \\ &\quad +\|(\lambda_n-\lambda_{n+1})Tx_n\| \\ &\leqslant \|x_{n+1}-x_n\|+|\lambda_n-\lambda_{n+1}|\|Tx_n\|\end{aligned} \tag{3.6}$$

同理可证

$$\|R_{n+1}-R_n\|\leqslant\|y_{n+1}-y_n\|+|\lambda_n-\lambda_{n+1}|\|Ty_n\| \tag{3.7}$$

从而由式 (3.4) 有

$$\begin{aligned}\|y_{n+1}-y_n\| &= \|\beta_{n+1}x_{n+1}-\beta_n x_n+(1-\beta_{n+1})SP_{n+1}-(1-\beta_n)SP_n\| \\ &= \|\beta_{n+1}(x_{n+1}-x_n)+(\beta_{n+1}-\beta_n)x_n \\ &\quad +(1-\beta_{n+1})(SP_{n+1}-SP_n)+(\beta_n-\beta_{n+1})SP_n\| \\ &\leqslant \beta_{n+1}\|x_{n+1}-x_n\|+(1-\beta_{n+1})\|P_{n+1}-P_n\| \\ &\quad +|\beta_n-\beta_{n+1}|(\|x_n\|+\|SP_n\|) \\ &\leqslant \|x_{n+1}-x_n\|+|\lambda_n-\lambda_{n+1}|\|Tx_n\| \\ &\quad +|\beta_n-\beta_{n+1}|(\|x_n\|+\|SP_n\|)\end{aligned} \tag{3.8}$$

由式 (3.7) 和式 (3.8) 有

$$\begin{aligned}\|R_{n+1}-R_n\| \leqslant&\|x_{n+1}-x_n\|+|\lambda_n-\lambda_{n+1}|(\|Tx_n\|+\|Ty_n\|) \\ &+|\beta_n-\beta_{n+1}|(\|x_n\|+\|SP_n\|)\end{aligned}$$

令 $U_n := S(\gamma_n u + (1-\gamma_n)R_n)$, 则 $x_{n+1} = \alpha_n x_n + (1-\alpha_n)U_n$. 从而

$$
\begin{aligned}
&\|U_{n+1} - U_n\| - \|x_{n+1} - x_n\| \\
=&\|S(\gamma_{n+1}u + (1-\gamma_{n+1})R_{n+1}) - S(\gamma_n u + (1-\gamma_n)R_n)\| - \|x_{n+1} - x_n\| \\
\leqslant&\|(\gamma_{n+1} - \gamma_n)u + (1-\gamma_{n+1})R_{n+1} - (1-\gamma_n)R_n\| - \|x_{n+1} - x_n\| \\
=&\|(\gamma_{n+1} - \gamma_n)(u - R_{n+1}) + (1-\gamma_n)(R_{n+1} - R_n)\| - \|x_{n+1} - x_n\| \\
\leqslant&|\gamma_{n+1} - \gamma_n|(\|u\| + \|R_{n+1}\|) + \|R_{n+1} - R_n\| - \|x_{n+1} - x_n\| \\
\leqslant&|\gamma_{n+1} - \gamma_n|(\|u\| + \|R_{n+1}\|) + |\lambda_n - \lambda_{n+1}|(\|Tx_n\| + \|Ty_n\|) \\
&+ |\beta_n - \beta_{n+1}|(\|x_n\| + \|SP_n\|)
\end{aligned}
$$

所以

$$
\limsup_{n\to\infty}(\|U_{n+1} - U_n\| - \|x_{n+1} - x_n\|) \leqslant 0
$$

因此, 由引理 1.20 有

$$
\lim_{n\to\infty}\|U_n - x_n\| = 0
$$

从而

$$
\lim_{n\to\infty}\|x_{n+1} - x_n\| = \lim_{n\to\infty}(1-\alpha_n)\|U_n - x_n\| = 0
$$

第三步: $\lim\limits_{n\to\infty}\|SR_n - R_n\| = 0$.

由式 (1.2) 有

$$
\begin{aligned}
\|x_{n+1} - x^*\|^2 =& \|\alpha_n x_n + (1-\alpha_n)S(\gamma_n u + (1-\gamma_n)R_n) - x^*\|^2 \\
\leqslant& \alpha_n\|x_n - x^*\|^2 + (1-\alpha_n)\|S(\gamma_n u + (1-\gamma_n)R_n) - x^*\|^2 \\
\leqslant& \alpha_n\|x_n - x^*\|^2 + (1-\alpha_n)\|\gamma_n(u - x^*) + (1-\gamma_n)(R_n - x^*)\|^2 \\
\leqslant& \alpha_n\|x_n - x^*\|^2 + (1-\alpha_n)\gamma_n\|u - x^*\|^2 \\
&+(1-\alpha_n)(1-\gamma_n)\|R_n - x^*\|^2 \\
\leqslant& \alpha_n\|x_n - x^*\|^2 + (1-\alpha_n)\gamma_n\|u - x^*\|^2 \\
&+(1-\alpha_n)(1-\gamma_n)\|(y_n - \lambda_n Ty_n) - (x^* - \lambda_n Tx^*)\|^2 \\
\leqslant& \alpha_n\|x_n - x^*\|^2 + (1-\alpha_n)\gamma_n\|u - x^*\|^2 \\
&+(1-\alpha_n)(1-\gamma_n)(\|y_n - x^*\|^2 + \lambda_n(\lambda_n - 2\alpha)\|Ty_n - Tx^*\|^2) \\
\leqslant& \|x_n - x^*\|^2 + (1-\alpha_n)\gamma_n\|u - x^*\|^2 \\
&+(1-\alpha_n)(1-\gamma_n)a(b - 2\alpha)\|Ty_n - Tx^*\|^2
\end{aligned}
$$

所以

$$\begin{aligned}&(1-\alpha_n)(1-\gamma_n)a(2\alpha-b)\|Ty_n-Tx^*\|^2\\\leqslant&(1-\alpha_n)\gamma_n\|u-x^*\|^2+\|x_n-x^*\|^2-\|x_{n+1}-x^*\|^2\\=&(1-\alpha_n)\gamma_n\|u-x^*\|^2+(\|x_n-x^*\|+\|x_{n+1}-x^*\|)(\|x_n-x^*\|-\|x_{n+1}-x^*\|)\\\leqslant&(1-\alpha_n)\gamma_n\|u-x^*\|^2+(\|x_n-x^*\|+\|x_{n+1}-x^*\|)\|x_n-x_{n+1}\|\end{aligned}\tag{3.9}$$

由于

$$\gamma_n\to0(n\to\infty),\quad\|x_n-x_{n+1}\|\to0,\quad n\to\infty$$

所以由式 (3.9) 有

$$\|Ty_n-Tx^*\|\to0$$

由引理 1.3(ii) 有

$$\begin{aligned}\|R_n-x^*\|^2=&\|\mathcal{P}_K(y_n-\lambda_nTy_n)-\mathcal{P}_K(x^*-\lambda_nTx^*)\|^2\\\leqslant&\langle(y_n-\lambda_nTy_n)-(x^*-\lambda_nTx^*),R_n-x^*\rangle\\=&\frac{1}{2}\{\|(y_n-\lambda_nTy_n)-(x^*-\lambda_nTx^*)\|^2+\|R_n-x^*\|^2\\&-\|(y_n-\lambda_nTy_n)-(x^*-\lambda_nTx^*)-(R_n-x^*)\|^2\}\\\leqslant&\frac{1}{2}\{\|y_n-x^*\|^2+\|R_n-x^*\|^2-\|(y_n-R_n)-\lambda_n(Ty_n-Tx^*)\|^2\}\\=&\frac{1}{2}\{\|y_n-x^*\|^2+\|R_n-x^*\|^2-\|y_n-R_n\|^2\\&+2\lambda_n\langle y_n-R_n,Ty_n-Tx^*\rangle-\lambda_n^2\|Ty_n-Tx^*\|^2\}\end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}\|R_n-x^*\|^2\leqslant&\|y_n-x^*\|^2-\|y_n-R_n\|^2\\&+2\lambda_n\langle y_n-R_n,Ty_n-Tx^*\rangle-\lambda_n^2\|Ty_n-Tx^*\|^2\\\leqslant&\|x_n-x^*\|^2-\|y_n-R_n\|^2\\&+2\lambda_n\|y_n-R_n\|\|Ty_n-Tx^*\|\end{aligned}$$

从而

$$\begin{aligned}\|x_{n+1}-x^*\|^2=&\|\alpha_nx_n+(1-\alpha_n)S(\gamma_nu+(1-\gamma_n)R_n)-x^*\|^2\\\leqslant&\alpha_n\|x_n-x^*\|^2+(1-\alpha_n)\gamma_n\|u-x^*\|^2\\&+(1-\alpha_n)(1-\gamma_n)\|R_n-x^*\|^2\\\leqslant&\|x_n-x^*\|^2+(1-\alpha_n)\gamma_n\|u-x^*\|^2-(1-\alpha_n)(1-\gamma_n)\|y_n-R_n\|^2\\&+2\lambda_n(1-\alpha_n)(1-\gamma_n)\|y_n-R_n\|\|Ty_n-Tx^*\|\end{aligned}$$

所以

$$
\begin{aligned}
&(1-\alpha_n)(1-\gamma_n)\|y_n-R_n\|^2\\
\leqslant\, & 2\lambda_n(1-\alpha_n)(1-\gamma_n)\|y_n-R_n\|\|Ty_n-Tx^*\|\\
&+(1-\alpha_n)\gamma_n\|u-x^*\|^2+\|x_n-x^*\|^2-\|x_{n+1}-x^*\|^2\\
\leqslant\, & 2\lambda_n(1-\alpha_n)(1-\gamma_n)\|y_n-R_n\|\|Ty_n-Tx^*\|\\
&+(1-\alpha_n)\gamma_n\|u-x^*\|^2+(\|x_n-x^*\|+\|x_{n+1}-x^*\|)\|x_n-x_{n+1}\|
\end{aligned}
\tag{3.10}
$$

由于

$$
\gamma_n\to 0,\quad \|Ty_n-Tx^*\|\to 0,\quad \|x_n-x_{n+1}\|\to 0,\quad n\to\infty
$$

所以由式 (3.10) 有 $\|y_n-R_n\|\to 0(n\to\infty)$.

另一方面

$$
\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\|SR_n-U_n\| &= \lim_{n\to\infty}\|SR_n-S(\gamma_n u+(1-\gamma_n)R_n)\|\\
&\leqslant \lim_{n\to\infty}\gamma_n\|u-R_n\|=0
\end{aligned}
$$

$$
\lim_{n\to\infty}\|x_n-y_n\|=\lim_{n\to\infty}(1-\beta_n)\|SP_n-x_n\|=0
$$

所以由

$$
\|SR_n-R_n\|\leqslant\|SR_n-U_n\|+\|U_n-x_n\|+\|x_n-y_n\|+\|y_n-R_n\|
$$

可得 $\|SR_n-R_n\|\to 0(n\to\infty)$.

第四步: $\limsup\limits_{n\to\infty}\langle u-z_0,R_n-z_0\rangle\leqslant 0$, 其中 $z_0=\mathcal{P}_{\mathrm{VI}(T,K)\cap F(S)}u$.

选取 $\{R_n\}$ 的子序列 $\{R_{n_i}\}$ 使得

$$
\limsup_{n\to\infty}\langle u-z_0,SR_n-z_0\rangle=\lim_{i\to\infty}\langle u-z_0,SR_{n_i}-z_0\rangle
$$

由 $\{R_{n_i}\}$ 的有界性知, 存在子序列 $\{R_{n_{i_j}}\}$ 弱收敛于 z. 不失一般性, 假设 $\{R_{n_i}\}$ 弱收敛于 z. 由于 $\|SR_n-R_n\|\to 0$, 所以 SR_{n_i} 弱收敛于 z. 接下来我们证明 $z\in\mathrm{VI}(T,K)\cap F(S)$. 首先证明 $z\in\mathrm{VI}(T,K)$. 令

$$
Av=\begin{cases} Tv+N_K(v), & v\in K\\ \varnothing, & v\neq K\end{cases}
$$

则 A 是极大单调的. 令 $(v,w)\in G(A)$, 其中 $G(A)=\{(x,y):y\in Ax\}$. 由 $w-Tv\in N_Kv$ 和 $R_n\in K$, 有 $\langle v-R_n,w-Tv\rangle\geqslant 0$. 同时, 由 $R_n=\mathcal{P}_K(y_n-\lambda_nTy_n)$, 有

$$
\langle v-R_n,R_n-(y_n-\lambda_nTy_n)\rangle\geqslant 0
$$

即

$$\left\langle v - R_n, \frac{R_n - y_n}{\lambda_n} + Ty_n \right\rangle \geqslant 0$$

所以

$$\begin{aligned}
\langle v - R_{n_i}, w\rangle &\geqslant \langle v - R_{n_i}, Tv\rangle \\
&\geqslant \langle v - R_{n_i}, Tv\rangle - \left\langle v - R_{n_i}, \frac{R_{n_i} - y_{n_i}}{\lambda_{n_i}} + Ty_{n_i}\right\rangle \\
&= \left\langle v - R_{n_i}, Tv - Ty_{n_i} - \frac{R_{n_i} - y_{n_i}}{\lambda_{n_i}}\right\rangle \\
&= \langle v - R_{n_i}, Tv - TR_{n_i}\rangle + \langle v - R_{n_i}, TR_{n_i} - Ty_{n_i}\rangle \\
&\quad - \left\langle v - R_{n_i}, \frac{R_{n_i} - y_{n_i}}{\lambda_{n_i}}\right\rangle \\
&\geqslant \langle v - R_{n_i}, TR_{n_i} - Ty_{n_i}\rangle - \left\langle v - R_{n_i}, \frac{R_{n_i} - y_{n_i}}{\lambda_{n_i}}\right\rangle
\end{aligned} \tag{3.11}$$

从而由 T 的连续性,$\|R_{n_i} - y_{n_i}\| \to 0$ 和式 (3.11) 知, 当 $i \to \infty$ 时,$\langle v - z, w\rangle \geqslant 0$. 由 A 的极大单调性有 $z \in T^{-1}0$, 从而 $z \in \mathrm{VI}(T, K)$.

现在证明 $z \in F(S)$. 假设 $z \notin F(S)$. 由引理 1.19 有

$$\begin{aligned}
\liminf_{n\to\infty} \|R_{n_i} - z\| &< \liminf_{n\to\infty} \|R_{n_i} - Sz\| = \liminf_{n\to\infty} \|R_{n_i} - SR_{n_i} + SR_{n_i} - Sz\| \\
&\leqslant \liminf_{n\to\infty} (\|R_{n_i} - SR_{n_i}\| + \|SR_{n_i} - Sz\|) = \liminf_{n\to\infty} \|SR_{n_i} - Sz\| \\
&\leqslant \liminf_{n\to\infty} \|R_{n_i} - z\|
\end{aligned}$$

矛盾. 因而 $z \in F(S)$.

因此由引理 1.3 及 $\|SR_n - R_n\| \to 0$ 有

$$\begin{aligned}
\limsup_{n\to\infty} \langle u - z_0, R_n - z_0\rangle &= \limsup_{n\to\infty} \langle u - z_0, SR_n - z_0\rangle \\
&= \lim_{i\to\infty} \langle u - z_0, SR_{n_i} - z_0\rangle \\
&= \langle u - z_0, z - z_0\rangle \leqslant 0
\end{aligned} \tag{3.12}$$

第五步: $\lim\limits_{n\to\infty} \|x_n - z_0\| = 0$.

由引理 1.22 有

$$\begin{aligned}
\|x_{n+1} - z_0\|^2 &= \|\alpha_n(x_n - z_0) + (1 - \alpha_n)(S(\gamma_n u + (1 - \gamma_n)R_n)) - z_0\|^2 \\
&\leqslant \alpha_n\|x_n - z_0\|^2 + (1 - \alpha_n)\|\gamma_n u + (1 - \gamma_n)R_n - z_0\|^2 \\
&= \alpha_n\|x_n - z_0\|^2 + (1 - \alpha_n)\|\gamma_n(u - z_0) + (1 - \gamma_n)(R_n - z_0)\|^2
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\leqslant \alpha_n\|x_n - z_0\|^2 + (1-\alpha_n)[(1-\gamma_n)^2\|R_n - z_0\|^2 \\
&\quad +2\langle \gamma_n(u-z_0), \gamma_n(u-z_0) + (1-\gamma_n)(R_n - z_0)\rangle] \\
&\leqslant \alpha_n\|x_n - z_0\|^2 + (1-\alpha_n)(1-\gamma_n)\|x_n - z_0\|^2 \\
&\quad +2\gamma_n(1-\alpha_n)[\gamma_n\|u-z_0\|^2 + (1-\gamma_n)\langle u-z_0, R_n - z_0\rangle] \\
&= (1-\gamma_n(1-\alpha_n))\|x_n - z_0\|^2 + \gamma_n(1-\alpha_n)[2\gamma_n\|u-z_0\|^2 \\
&\quad +2(1-\gamma_n)\langle u-z_0, R_n - z_0\rangle]
\end{aligned}
$$

由 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\gamma_n = \infty$ 知 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\gamma_n(1-\alpha_n) = \infty$, 由 $\lim\limits_{n\to\infty}\gamma_n = 0$ 和式 (3.12) 有

$$
\begin{aligned}
&\limsup_{n\to\infty}[2\gamma_n\|u-z_0\|^2 + 2(1-\gamma_n)\langle u-z_0, R_n - z_0\rangle] \\
&\leqslant 2\lim_{n\to\infty}\gamma_n\|u-z_0\|^2 + 2\limsup_{n\to\infty}(1-\gamma_n)\langle u-z_0, R_n - z_0\rangle] \\
&= 2\lim_{n\to\infty}(1-\gamma_n)\cdot\limsup_{n\to\infty}\langle u-z_0, R_n - z_0\rangle \leqslant 0
\end{aligned}
$$

因而由引理 1.11 有 $\|x_n - z_0\| \to 0 (n\to\infty)$.

接下来我们考虑三步迭代算法.

定理 3.3　设 K 是实 Hilbert 空间 H 上的非空闭凸集, $T: K\to H$ 是 α-余强制的, $S: K\to K$ 是非扩张的且 $\mathrm{VI}(T,K)\cap F(S)\neq\varnothing$. 给定 $u\in K$, $x_0\in K$, 序列 $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ 和 $\{z_n\}$ 由以下算法产生:

$$
\begin{cases}
y_n = \beta_n x_n + (1-\beta_n)S\mathcal{P}_K(x_n - \lambda_n T x_n) \\
z_n = \mu_n x_n + (1-\mu_n)S\mathcal{P}_K(y_n - \lambda_n T y_n) \\
x_{n+1} = \alpha_n x_n + (1-\alpha_n)S(\gamma_n u + (1-\gamma_n)\mathcal{P}_K(z_n - \lambda_n T z_n)), \quad n\geqslant 0
\end{cases}
\tag{3.13}
$$

其中, $\{\alpha_n\}$, $\{\beta_n\}$, $\{\gamma_n\}$ 和 $\{\mu_n\}$ 均为定义在 $[0,1]$ 内的序列, $\{\lambda_n\}$ 满足 $\lambda_n\in[a,b](0<a<b<2\alpha)$.

如果

(i) $0 < \liminf\limits_{n\to\infty}\alpha_n \leqslant \limsup\limits_{n\to\infty}\alpha_n < 1$;

(ii) $\lim\limits_{n\to\infty}\gamma_n = 0, \sum\limits_{n=0}^{\infty}\gamma_n = \infty, \lim\limits_{n\to\infty}\mu_n = 1$;

(iii) $\lim\limits_{n\to\infty}(\beta_{n+1}-\beta_n) = 0, \lim\limits_{n\to\infty}(\lambda_{n+1}-\lambda_n) = 0$.

则由式 (3.13) 所产生的序列 $\{x_n\}$ 强收敛于 $\mathcal{P}_{\mathrm{VI}(T,K)\cap F(S)}u$.

证明　设 $x^*\in\mathrm{VI}(T,K)\cap F(S)$, 则 $x^* = \mathcal{P}_K(x^* - \lambda_n T x^*)$. 令 $P_n := \mathcal{P}_K(x_n - \lambda_n T x_n)$, $Q_n := \mathcal{P}_K(y_n - \lambda_n T y_n)$ 和 $R_n := \mathcal{P}_K(z_n - \lambda_n T z_n)(\forall n\geqslant 0)$. 下面分五步来证明.

第一步: 序列 $\{x_n\}$ 有界. 由式 (3.13) 和引理 1.23 有

$$\|P_n - x^*\| \leqslant \|(x_n - \lambda_n Tx_n) - (x^* - \lambda_n Tx^*)\| \leqslant \|x_n - x^*\| \tag{3.14}$$

同理可证

$$\|Q_n - x^*\| \leqslant \|y_n - x^*\|, \quad \|R_n - x^*\| \leqslant \|z_n - x^*\| \tag{3.15}$$

由式 (3.14) 和式 (3.15) 有

$$\|y_n - x^*\| \leqslant \|x_n - x^*\|, \quad \|z_n - x^*\| \leqslant \|x_n - x^*\| \tag{3.16}$$

所以, 由式 (3.15) 和式 (3.16) 有

$$\|x_{n+1}-x^*\| \leqslant (1-\alpha_n)\gamma_n\|u-x^*\|+(1-(1-\alpha_n)\gamma_n)\|x_n-x^*\| \leqslant \max\{\|u-x^*\|, \|x_0-x^*\|\}$$

因而 $\{x_n\}$ 有界, 从而 $\{P_n\},\{Q_n\},\{R_n\},\{SP_n\},\{SQ_n\},\{SR_n\},\{Tx_n\},\{Ty_n\}$ 和 $\{Tz_n\}$ 均有界.

第二步: $\lim\limits_{n\to\infty}\|x_{n+1}-x_n\| = 0$.

由 $I - \lambda_n T$ 的非扩张性有

$$\|P_{n+1} - P_n\| \leqslant \|x_{n+1} - x_n\| + |\lambda_n - \lambda_{n+1}|\|Tx_n\|$$

同理可证

$$\|Q_{n+1} - Q_n\| \leqslant \|y_{n+1} - y_n\| + |\lambda_n - \lambda_{n+1}|\|Ty_n\|$$

$$\|R_{n+1} - R_n\| \leqslant \|z_{n+1} - z_n\| + |\lambda_n - \lambda_{n+1}|\|Tz_n\|$$

从而由式 (3.13) 有

$$\begin{aligned}\|y_{n+1} - y_n\| \leqslant{}& \|x_{n+1} - x_n\| + |\lambda_n - \lambda_{n+1}|\|Tx_n\| \\ &+|\beta_n - \beta_{n+1}|(\|x_n\| + \|SP_n\|)\\ \|z_{n+1} - z_n\| \leqslant{}& \|x_{n+1} - x_n\| + |\lambda_n - \lambda_{n+1}|(\|Tx_n\| + \|Ty_n\|)\\ &+|\mu_n - \mu_{n+1}|(\|x_n\| + \|SQ_n\|) + |\beta_n - \beta_{n+1}|(\|x_n\| + \|SP_n\|)\end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}\|R_{n+1} - R_n\| \leqslant{}& \|x_{n+1} - x_n\| + |\lambda_n - \lambda_{n+1}|(\|Tx_n\| + \|Ty_n\| + \|Tz_n\|)\\ &+|\mu_n - \mu_{n+1}|(\|x_n\| + \|SQ_n\|) + |\beta_n - \beta_{n+1}|(\|x_n\| + \|SP_n\|)\end{aligned}$$

令 $U_n := S(\gamma_n u + (1-\gamma_n)R_n))$, 则 $x_{n+1} = \alpha_n x_n + (1-\alpha_n)U_n$. 从而

$$
\begin{aligned}
\|U_{n+1} - U_n\| - \|x_{n+1} - x_n\| \leqslant & |\gamma_{n+1} - \gamma_n|(\|u\| + \|R_{n+1}\|) \\
& + |\lambda_n - \lambda_{n+1}|(\|Tx_n\| + \|Ty_n\| + \|Tz_n\|) \\
& + |\mu_n - \mu_{n+1}|(\|x_n\| + \|SQ_n\|) \\
& + |\beta_n - \beta_{n+1}|(\|x_n\| + \|SP_n\|)
\end{aligned}
$$

所以

$$
\limsup_{n\to\infty}(\|U_{n+1} - U_n\| - \|x_{n+1} - x_n\|) \leqslant 0
$$

因此, 由引理 1.20 有

$$
\lim_{n\to\infty} \|U_n - x_n\| = 0
$$

故

$$
\|x_{n+1} - x_n\| = (1-\alpha_n)\|U_n - x_n\| \to 0, \quad n \to \infty
$$

第三步: $\lim\limits_{n\to\infty} \|SR_n - R_n\| = 0.$

由式 (3.13) 有

$$
\begin{aligned}
\|x_{n+1} - x^*\|^2 \leqslant & \|x_n - x^*\|^2 + (1-\alpha_n)\gamma_n\|u - x^*\|^2 \\
& + (1-\alpha_n)(1-\gamma_n)a(b - 2\alpha)\|Tz_n - Tx^*\|^2
\end{aligned}
$$

所以

$$
\begin{aligned}
& (1-\alpha_n)(1-\gamma_n)a(2\alpha - b)\|Tz_n - Tx^*\|^2 \\
\leqslant & (1-\alpha_n)\gamma_n\|u - x^*\|^2 + (\|x_n - x^*\| + \|x_{n+1} - x^*\|)\|x_n - x_{n+1}\|
\end{aligned}
$$

所以 $\|Tz_n - Tx^*\| \to 0$.

由引理 1.3(ii) 有

$$
\begin{aligned}
\|R_n - x^*\|^2 \leqslant & \frac{1}{2}\{\|z_n - x^*\|^2 + \|R_n - x^*\|^2 - \|z_n - R_n\|^2 \\
& + 2\lambda_n\langle z_n - R_n, Tz_n - Tx^*\rangle - \lambda_n^2\|Tz_n - Tx^*\|^2\}
\end{aligned}
$$

从而

$$
\begin{aligned}
\|x_{n+1} - x^*\|^2 \leqslant & \|x_n - x^*\|^2 + (1-\alpha_n)\gamma_n\|u - x^*\|^2 \\
& - (1-\alpha_n)(1-\gamma_n)\|z_n - R_n\|^2 \\
& + 2\lambda_n(1-\alpha_n)(1-\gamma_n)\|z_n - R_n\|\|Tz_n - Tx^*\|
\end{aligned}
$$

所以

$$\begin{aligned}(1-\alpha_n)(1-\gamma_n)\|z_n-R_n\|^2 \leqslant & 2\lambda_n(1-\alpha_n)(1-\gamma_n)\|z_n-R_n\|\|Tz_n-Tx^*\| \\ & +(1-\alpha_n)\gamma_n\|u-x^*\|^2 \\ & +(\|x_n-x^*\|+\|x_{n+1}-x^*\|)\|x_n-x_{n+1}\|\end{aligned}$$

所以 $\|z_n-R_n\|\to 0(n\to\infty)$.

另一方面

$$\lim_{n\to\infty}\|SR_n-U_n\|\leqslant\lim_{n\to\infty}\gamma_n\|u-R_n\|=0$$

$$\lim_{n\to\infty}\|x_n-z_n\|=\lim_{n\to\infty}(1-\mu_n)\|SQ_n-x_n\|=0$$

所以

$$\begin{aligned}\|SR_n-R_n\|\leqslant & \|SR_n-U_n\|+\|U_n-x_n\| \\ & +\|x_n-z_n\|+\|z_n-R_n\|\to 0,\quad n\to\infty\end{aligned}$$

第四步：$\limsup\limits_{n\to\infty}\langle u-z_0,R_n-z_0\rangle\leqslant 0$, 其中 $z_0=\mathcal{P}_{\mathrm{VI}(T,K)\cap F(S)}u$.

取 $\{R_n\}$ 的子序列 $\{R_{n_i}\}$ 使

$$\limsup_{n\to\infty}\langle u-z_0,SR_n-z_0\rangle=\lim_{i\to\infty}\langle u-z_0,SR_{n_i}-z_0\rangle$$

由 $\{R_{n_i}\}$ 的有界性知, 存在子序列 $\{R_{n_{ij}}\}$ 弱收敛于 z. 不失一般性, 假设 $\{R_{n_i}\}$ 弱收敛于 z. 由于 $\|SR_n-R_n\|\to 0$, 所以 SR_{n_i} 弱收敛于 z. 类似于定理 3.2 的证明可得 $z\in\mathrm{VI}(T,K)\cap F(S)$.

因此, 由引理 1.3(i) 有

$$\begin{aligned}\limsup_{n\to\infty}\langle u-z_0,R_n-z_0\rangle &=\limsup_{n\to\infty}\langle u-z_0,SR_n-z_0\rangle \\ &=\lim_{i\to\infty}\langle u-z_0,SR_{n_i}-z_0\rangle \\ &=\langle u-z_0,z-z_0\rangle\leqslant 0\end{aligned}$$

第五步：$\lim\limits_{n\to\infty}\|x_n-z_0\|=0$.

由引理 1.22 有

$$\begin{aligned}&\|x_{n+1}-z_0\|^2 \\ \leqslant & (1-\gamma_n(1-\alpha_n))\|x_n-z_0\|^2 \\ & +\gamma_n(1-\alpha_n)[2\gamma_n\|u-z_0\|^2+2(1-\gamma_n)\langle u-z_0,R_n-z_0\rangle]\end{aligned}$$

由

$$\sum_{n=0}^{\infty} \gamma_n = \infty$$

知

$$\sum_{n=0}^{\infty} \gamma_n(1-\alpha_n) = \infty$$

由

$$\lim_{n\to\infty} \gamma_n = 0$$

有

$$\begin{aligned}
&\limsup_{n\to\infty}[2\gamma_n\|u-z_0\|^2 + 2(1-\gamma_n)\langle u-z_0, R_n-z_0\rangle] \\
&\leqslant 2\lim_{n\to\infty}\gamma_n\|u-z_0\|^2 + 2\limsup_{n\to\infty}(1-\gamma_n)\langle u-z_0, R_n-z_0\rangle \\
&\leqslant 0
\end{aligned}$$

因而由引理 1.11 有

$$\|x_n - z_0\| \to 0, \quad n\to\infty$$

注解 3.1　关于两步迭代法 (3.2) 和三步迭代法 (3.13), 有两个方面值得注意: 一方面, 迭代法 (3.13) 并不是迭代法 (3.2) 的简单推广, 即在式 (3.13) 中令 $\mu_n \equiv 1(n\geqslant 0)$ 后得到的算法与式 (3.2) 是不同的; 另一方面, 定理 3.3 中关于数列 $\{\beta_n\}(n\geqslant 0)$ 的假定要比定理 3.2 中的更弱.

3.2　特殊非扩张映射的不动点

令

$$L_i = \sum_{j=1}^{i}(k_j/s_i)S_j, \quad \mathrm{s}_i = \sum_{j=1}^{i} k_j, \quad i\geqslant 1 \tag{3.17}$$

式中, $\{k_j\}_{j=1}^{\infty}$ 满足 $k_j>0$ 且

$$\sum_{j=1}^{\infty} k_j = k < \infty, \quad S_j = T_j\mathcal{P}_{K_j} \tag{3.18}$$

其中, $\{K_j\}_{j=0}^{\infty}$ 是 H 的可数无限的非空闭凸子集, $\{T_j\}_{j=1}^{\infty}$ 是 K_j 到 K_j 上的可数无限的非扩张映射.

令 $K_0 := K$, $\mathcal{F} = \cap_{i\geqslant 1}Fix(T_i)$ 且 $Fix(T_i) = \{x\in K_i : x = T_ix\}$, $Fix(L_i) = \{x\in K_i : x = L_ix\}$.

对 $x \in K_0$, 定义

$$r(x) := x - \mathcal{P}_{K_0}\big(x - T(x)\big) \tag{3.19}$$

显然, 我们有 $x \in \mathrm{VI}(T, K)$ 当且仅当 $r(x) = 0$.

接下来我们介绍求解变分不等式问题 (3.1) 的如下混合超梯度算法.

算法 3.1 选取 $x_0 \in K_0$, $\delta \in (0,1)$, $\gamma \in (0,1)$. 令 $i = 0$.

步骤 1. 对 $x_i \in K_0$, 计算

$$y_i = \mathcal{P}_{K_0}\big(x_i - T(x_i)\big)$$

$$z_i = (1 - \eta_i)x_i + \eta_i y_i \tag{3.20}$$

其中, $\eta_i = \gamma^{n_i}$, n_i 是满足下面不等式的最小非负整数 n:

$$\langle T(x_i) - T\big(x_i - \gamma^n r(x_i)\big), r(x_i)\rangle \leqslant \delta \|r(x_i)\|^2 \tag{3.21}$$

步骤 2. 计算

$$t_i = \mathcal{P}_{H_i \cap K_0}(x_i)$$

其中

$$H_i = \{x \in K_0 | \langle x - z_i, T(z_i)\rangle \leqslant 0\} \tag{3.22}$$

步骤 3. 计算

$$w_i = \alpha_i x_0 + (1 - \alpha_i)[\beta_i x_i + (1 - \beta_i)L_i t_i]$$

其中, $\{\alpha_i\} \subset (a, b)$ $(a, b \in (0,1))$ 且当 $i \to \infty$ 时有 $\alpha_i \to 0$, 对 $c, d \in (0,1)$ 有 $\{\beta_i\} \subset [c, d]$.

步骤 4. 计算

$$x_{i+1} = \mathcal{P}_{Q_i \cap M_i}(x_0)$$

其中

$$Q_i = \{x \in H : \|w_i - x\|^2 \leqslant \|x_i - x\|^2 + \alpha_i(\|x_0\|^2 + 2\langle x_i - x_0, x\rangle)\}$$

$$M_i = \{x \in H : \langle x_i - x, x_0 - x_i\rangle \geqslant 0\}$$

步骤 5. 若 $r(x_{i+1}) = 0$, 停止, 否则, 回到第一步.

以下的三个命题在证明由算法 3.1 所生成迭代序列的强收敛性中起着关键作用.

命题 3.4 假设 L_i 由式 (3.17) 和式 (3.18) 定义, 若 $\mathcal{F} = \cap_{i\geqslant 1} Fix(T_i)$ 且 $Fix(T_i) = \{x \in K_i : x = T_i x\}$, $Fix(L_i) = \{x \in K_i : x = L_i x\}$, 那么 L_i 是非扩张的且 $\mathcal{F} \subset Fix(L_i)$.

证明 显然, 对任意的映射 $S : K \to K$ 有 $Fix(S) = Fix(S\mathcal{P}_K) := \{p \in H : S\mathcal{P}_K p = p\}$, 所以 $\mathcal{F} = \cap_{j\geqslant 1} Fix(T_j) = \cap_{j\geqslant 1} Fix(S_j)$, 其中 $S_j = T_j \mathcal{P}_{K_j}$ 是定义在 H 上的非扩张映射.

由式 (3.17) 和式 (3.18) 知

$$S = \frac{1}{k}\sum_{j=1}^{\infty} k_j S_j = \sum_{j=1}^{\infty} s_j S_j, \quad s_j = \frac{k_j}{k} \in (0,1)$$

且 $\sum\limits_{j=1}^{\infty} s_j = 1$. 由引理 2.2 知, S 是非扩张的且 $Fix(S) = \mathcal{F}$.

现令 $x \in \mathcal{F}$. 因对所有的 $j \geqslant 1$, 有 $x \in Fix(S_j)$, 所以

$$L_i x = \sum_{j=1}^{i} (k_j/s_i) S_j x = \sum_{j=1}^{i} (k_j/s_i) x = x \frac{\sum\limits_{j=1}^{i} k_j}{s_i} = x\frac{s_i}{s_i} = x$$

故 $\mathcal{F} \subset Fix(L_i)$.

因为

$$\begin{aligned}
&\|L_i x - L_i y\| \\
\leqslant & \left\| \sum_{j=1}^{i} (k_j/s_i) S_j x - \sum_{j=1}^{i} (k_j/s_i) S_j y \right\| \\
\leqslant & \left\| \sum_{j=1}^{i} (k_j/s_i)(S_j x - S_j y) \right\| \\
\leqslant & \sum_{j=1}^{i} (k_j/s_i) \|S_j x - S_j y\| \\
\leqslant & \sum_{j=1}^{i} (k_j/s_i) \|x - y\| \\
\leqslant & \frac{\sum\limits_{j=1}^{i} k_j}{s_i} \|x - y\| \\
\leqslant & \|x - y\|
\end{aligned}$$

所以 L_i 是非扩张的.

命题 3.5 假设映射 $T : K_0 \to H$ 是单调和连续的, $\mathrm{VI}(T, K) \cap \mathcal{F} \neq \varnothing$. 若

$x^* \in \mathrm{VI}(T,K)\cap\mathcal{F}$, 则对算法 3.1 生成的序列 $\{x_i\},\{w_i\},\{t_i\}$, 有

$$\frac{(1-\alpha_i)(1-\beta_i)}{2}\|x_i-t_i\|^2 \leqslant \|w_i-x_i\|[\|w_i-x^*\|+\|x_i-x^*\|] \\ +\alpha_i(\|x_0\|^2+2\langle x_i-x_0,x^*\rangle) \tag{3.23}$$

$$(1-\alpha_i)(1-\beta_i)\left(\frac{1-\delta}{\|T(z_i)\|}\right)^2\eta_i^2\|r(x_i)\|^4 \leqslant \|w_i-x_i\|[\|w_i-x^*\|+\|x_i-x^*\|] \\ +\alpha_i\left(\|x_0\|^2+2\langle x_i-x_0,x^*\rangle\right) \tag{3.24}$$

证明 类似于文献 [133] 定理 2.1 的证明, 可得

$$\|t_i-x^*\|^2 \leqslant \|x_i-x^*\|^2-\|x_i-t_i\|^2+2\frac{\eta_i\langle r(x_i),T(z_i)\rangle}{\|T(z_i)\|^2}\langle z_i-t_i,T(z_i)\rangle \tag{3.25}$$

因为 $z_i=(1-\eta_i)x_i+\eta_i y_i$, 故

$$\frac{\eta_i\langle r(x_i),T(z_i)\rangle}{\|T(z_i)\|^2}\langle z_i-x_i,T(z_i)\rangle = \frac{\eta_i\langle r(x_i),T(z_i)\rangle}{\|T(z_i)\|^2}\langle -\eta_i r(x_i),T(z_i)\rangle \\ = -\left(\frac{\eta_i\langle r(x_i),T(z_i)\rangle}{\|T(z_i)\|}\right)^2 \tag{3.26}$$

利用 Cauchy-Schwarz 不等式有

$$\frac{\eta_i\langle r(x_i),T(z_i)\rangle}{\|T(z_i)\|^2}\langle x_i-t_i,T(z_i)\rangle \leqslant \sqrt{2}\frac{\eta_i\langle r(x_i),T(z_i)\rangle}{\|T(z_i)\|^2}\frac{1}{\sqrt{2}}\|x_i-t_i\|\|T(z_i)\| \\ \leqslant \frac{1}{2}\left[2\left(\frac{\eta_i\langle r(x_i),T(z_i)\rangle}{\|T(z_i)\|}\right)^2+\frac{1}{2}\|x_i-t_i\|^2\right] \tag{3.27}$$

因此, 由式 (3.25)~ 式 (3.27) 有

$$\|t_i-x^*\|^2 \leqslant \|x_i-x^*\|^2-\|x_i-t_i\|^2-2\left(\frac{\eta_i\langle r(x_i),T(z_i)\rangle}{\|T(z_i)\|}\right)^2 \\ +2\left(\frac{\eta_i\langle r(x_i),T(z_i)\rangle}{\|T(z_i)\|}\right)^2+\frac{1}{2}\|x_i-t_i\|^2 \\ = \|x_i-x^*\|^2-\frac{1}{2}\|x_i-t_i\|^2$$

由 $x^*\in\mathrm{VI}(T,K)\cap\mathcal{F}$ 和 $\mathcal{F}\subset Fix(L_i)$ 知 $x^*\in Fix(L_i)$. 所以

$$\|w_i-x^*\|^2 \leqslant \alpha_i\|x_0-x^*\|^2+(1-\alpha_i)\beta_i\|x_i-x^*\|^2+(1-\alpha_i)(1-\beta_i)\|L_i t_i-x^*\|^2 \\ \leqslant \alpha_i\|x_0-x^*\|^2+(1-\alpha_i)\beta_i\|x_i-x^*\|^2+(1-\alpha_i)(1-\beta_i)\|t_i-x^*\|^2$$

$$
\begin{aligned}
&\leqslant \alpha_i\|x_0 - x^*\|^2 + (1-\alpha_i)\beta_i\|x_i - x^*\|^2 \\
&\quad +(1-\alpha_i)(1-\beta_i)(\|x_i - x^*\|^2 - \frac{1}{2}\|x_i - t_i\|^2) \\
&= \alpha_i\|x_0 - x^*\|^2 + (1-\alpha_i)\|x_i - x^*\|^2 \\
&\quad -\frac{(1-\alpha_i)(1-\beta_i)}{2}\|x_i - t_i\|^2 \\
&= \|x_i - x^*\|^2 + \alpha_i(\|x_0 - x^*\|^2 - \|x_i - x^*\|^2) \\
&\quad -\frac{(1-\alpha_i)(1-\beta_i)}{2}\|x_i - t_i\|^2 \\
&= \|x_i - x^*\|^2 + \alpha_i(\|x_0\|^2 - \|x_i\|^2 + 2\langle x_i - x_0, x^*\rangle) \\
&\quad -\frac{(1-\alpha_i)(1-\beta_i)}{2}\|x_i - t_i\|^2 \\
&\leqslant \|x_i - x^*\|^2 + \alpha_i(\|x_0\|^2 + 2\langle x_i - x_0, x^*\rangle) \\
&\quad -\frac{(1-\alpha_i)(1-\beta_i)}{2}\|x_i - t_i\|^2 \\
&\leqslant \|x_i - x^*\|^2 + \alpha_i(\|x_0\|^2 + 2\langle x_i - x_0, x^*\rangle)
\end{aligned} \tag{3.28}
$$

根据式 (3.28), 对所有的 $i \in N$, 有

$$
\begin{aligned}
\frac{(1-\alpha_i)(1-\beta_i)}{2}\|x_i - t_i\|^2 &\leqslant \|x_i - x^*\|^2 - \|w_i - x^*\|^2 + \alpha_i(\|x_0\|^2 + 2\langle x_i - x_0, x^*\rangle) \\
&\leqslant \|w_i - x_i\|[\|w_i - x^*\| + \|x_i - x^*\|] \\
&\quad +\alpha_i(\|x_0\|^2 + 2\langle x_i - x_0, x^*\rangle)
\end{aligned}
$$

再次运用 Cauchy-Schwarz 不等式, 得到

$$
\begin{aligned}
\frac{\eta_i\langle r(x_i), T(z_i)\rangle}{\|T(z_i)\|^2}\langle x_i - t_i, T(z_i)\rangle &\leqslant \frac{\eta_i\langle r(x_i), T(z_i)\rangle}{\|T(z_i)\|^2}\|x_i - t_i\|\,\|T(z_i)\| \\
&\leqslant \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\eta_i\langle r(x_i), T(z_i)\rangle}{\|T(z_i)\|}\right)^2 + \|x_i - t_i\|^2\right]
\end{aligned} \tag{3.29}
$$

由此, 从式 (3.25), 式 (3.26) 和式 (3.29) 可得

$$
\begin{aligned}
\|w_i - x^*\|^2 &\leqslant \alpha_i\|x_0 - x^*\|^2 + (1-\alpha_i)\beta_i\|x_i - x^*\|^2 \\
&\quad + (1-\alpha_i)(1-\beta_i)\left[\|x_i - x^*\|^2 - \left(\frac{\eta_i(1-\delta)}{\|T(z_i)\|}\right)^2\|r(x_i)\|^4\right] \\
&= \alpha_i\|x_0 - x^*\|^2 + (1-\alpha_i)\|x_i - x^*\|^2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&-(1-\alpha_i)(1-\beta_i)\left(\frac{\eta_i(1-\delta)}{\|T(z_i)\|}\right)^2\|r(x_i)\|^4 \\
=&\|x_i-x^*\|^2+\alpha_i\left(\|x_0-x^*\|^2-\|x_i-x^*\|^2\right) \\
&-(1-\alpha_i)(1-\beta_i)\left(\frac{\eta_i(1-\delta)}{\|T(z_i)\|}\right)^2\|r(x_i)\|^4 \\
=&\|x_i-x^*\|^2+\alpha_i\left(\|x_0\|^2-\|x_i\|^2+2\langle x_i-x_0,x^*\rangle\right) \\
&-(1-\alpha_i)(1-\beta_i)\left(\frac{\eta_i(1-\delta)}{\|T(z_i)\|}\right)^2\|r(x_i)\|^4 \\
\leqslant&\|x_i-x^*\|^2+\alpha_i\left(\|x_0\|^2+2\langle x_i-x_0,x^*\rangle\right) \\
&-(1-\alpha_i)(1-\beta_i)\left(\frac{\eta_i(1-\delta)}{\|T(z_i)\|}\right)^2\|r(x_i)\|^4
\end{aligned}
\tag{3.30}
$$

因此, 由式 (3.30) 得到不等式 (3.24).

命题 3.6 若 $\mathrm{VI}(T,K)\cap\mathcal{F}\neq\varnothing$, 则

(i) x_{i+1} 有定义;

(ii) $\|x_i-x_0\|\leqslant\|x_{i+1}-x_0\|\leqslant\|x_0-\mathcal{P}_{\mathrm{VI}(T,K)\cap\mathcal{F}}(x_0)\|$.

证明 (i) 我们只需证明 $M_i\cap Q_i$ 是 Hilbert 空间 H 中的非空闭凸集. 首先, 我们证明, 对任意的 $i\in N$, $M_i\cap Q_i$ 是闭凸的. 显然，对任意的 $i\in N$, M_i 是闭凸的且 Q_i 是闭的. 因为

$$
\|w_i-x\|^2\leqslant\|x_i-x\|^2+\alpha_i(\|x_0\|^2+2\langle x_i-x_0,x\rangle)
$$

等价于

$$
\langle(1-\alpha_i)x_i+\alpha_ix_0-w_i,x\rangle\leqslant\langle x_i-w_i,x_i\rangle-\frac{1}{2}\|w_i-x_i\|^2+\frac{\alpha_i}{2}\|x_0\|^2
$$

因此, Q_i 是凸的. 接着我们证明 $M_i\cap Q_i$ 是非空的. 假设 $\mathrm{VI}(T,K)\cap\mathcal{F}\subset M_i$. 因为 $x_{i+1}=\mathcal{P}_{Q_i\cap M_i}(x_0)$，所以, 对所有 $z\in\mathrm{VI}(T,K)\cap\mathcal{F}\subset Q_i\cap M_i$, 我们有

$$
\langle x_{i+1}-x_0,z-x_{i+1}\rangle\geqslant0
$$

因此 $\mathrm{VI}(T,K)\cap\mathcal{F}\subset M_{i+1}$. 故得证.

(ii) 由于

$$
\langle x_i-x,x_0-x_i\rangle\geqslant0,\quad\forall x\in M_i
$$

所以 $x_i = \mathcal{P}_{M_i}(x_0)$. 由 $x_{i+1} \in M_i$ 知

$$\|x_i - x_0\| = \|\mathcal{P}_{M_i}(x_0) - x_0\| \leqslant \|x_{i+1} - x_0\| \tag{3.31}$$

注意 $\mathcal{P}_{\mathrm{VI}(T,K)\cap\mathcal{F}}(x_0) \in \mathrm{VI}(T,K) \cap \mathcal{F} \subset M_{i+1}$, 因此

$$\|x_{i+1} - x_0\| = \|\mathcal{P}_{M_{i+1}}(x_0) - x_0\| \leqslant \|\mathcal{P}_{\mathrm{VI}(T,K)\cap\mathcal{F}}(x_0) - x_0\| \tag{3.32}$$

故根据式 (3.31) 和式 (3.32) 有

$$\|x_i - x_0\| \leqslant \|x_{i+1} - x_0\| \leqslant \|x_0 - \mathcal{P}_{\mathrm{VI}(T,K)\cap\mathcal{F}}(x_0)\|$$

下面的定理说明由算法 3.1 生成的序列 $\{x_i\}$ 强收敛到 $\mathrm{VI}(T,K) \cap \mathcal{F}$ 的某个元素.

定理 3.7 设 $\{K_j\}_{j=0}^{\infty}$ 是 H 中的可数无限的非空闭凸子集, 映射 $T: K_0 \to H$ 是单调和连续的, $\{T_j\}_{j=1}^{\infty}$ 是 K_j 到 K_j 上的可数无限的非扩张映射, $\mathrm{VI}(T,K)\cap\mathcal{F} \neq \varnothing$, $\mathcal{F} = \bigcap_{i\geqslant 1} Fix(T_i)$ 且 $Fix(T_i) = \{x \in K_i : x = T_i x\}$. 则由算法 3.1 所产生的序列 $\{x_i\}, \{w_i\}, \{t_i\}$ 强收敛到 $x^* \in \mathrm{VI}(T,K) \cap \mathcal{F}$, 其中 $x^* = \mathcal{P}_{\mathrm{VI}(T,K)\cap\mathcal{F}}(x_0)$.

证明 根据引理 1.18 和命题 3.6(ii), 我们只需证明 $\omega_\omega(x_i) \subset \mathrm{VI}(T,K) \cap \mathcal{F}$. 分四步证明我们的结论.

第一步: $\|x_{i+1} - x_i\| \to 0, \|w_i - x_i\| \to 0, \|x_i - t_i\| \to 0, \|L_i x_i - x_i\| \to 0$.

由于 $x_{i+1} = \mathcal{P}_{Q_i \cap M_i}(x_0)$, 所以对所有的 $x^* \in \mathrm{VI}(T,K) \cap \mathcal{F}$, 有

$$\|x_{i+1} - x_0\| \leqslant \|x^* - x_0\|$$

因此, 序列 $\{x_i\}$ 有界. 由命题 3.6(ii) 知 $\lim\limits_{i\to\infty} \|x_i - x_0\| = \xi < \infty$.

在引理 1.3(iii) 中令 $y = x_{i+1}$ 和 $x = x_0$, 有

$$\|x_{i+1} - x_i\|^2 \leqslant \|x_{i+1} - x_0\|^2 - \|x_i - x_0\|^2 \tag{3.33}$$

因此

$$\|x_{i+1} - x_i\| \to 0, \quad i \to 0 \tag{3.34}$$

由 $x_{i+1} \in Q_i$ 有

$$\|w_i - x_{i+1}\|^2 \leqslant \|x_i - x_{i+1}\|^2 + \alpha_i(\|x_0\|^2 + 2\langle x_i - x_0, x_{i+1}\rangle) \tag{3.35}$$

因为 $\{x_i\}$ 有界且 $\alpha_i \to 0(i \to 0)$, 所以由式 (3.34) 和式 (3.35) 有

$$\|w_i - x_{i+1}\| \to 0, \quad i \to 0$$

从而

$$\|w_i - x_i\| \to 0 \tag{3.36}$$

由 $\{x_i\}$ 有界知 $\{w_i\}$ 有界. 因为 $\{\alpha_i\} \subset (a,b)(a,b \in (0,1))$ 且 $\{\beta_i\} \subset [c,d](c,d \in (0,1))$, 所以从式 (3.23) 和式 (3.36) 可得

$$\|x_i - t_i\| \to 0 \tag{3.37}$$

因为

$$\begin{aligned}
&\|L_i t_i - x_i\| \\
&= \left\| \frac{\alpha_i}{(1-\alpha_i)\beta_i}(L_i t_i - x_0) + \frac{1}{(1-\alpha_i)\beta_i}(w_i - L_i t_i) \right\| \\
&\leqslant \frac{\alpha_i}{(1-\alpha_i)\beta_i}\|L_i t_i - x_0\| + \frac{1}{(1-\alpha_i)\beta_i}\|w_i - L_i t_i\| \\
&\leqslant \frac{\alpha_i}{(1-\alpha_i)\beta_i}\|L_i t_i - x_0\| + \frac{1}{(1-\alpha_i)\beta_i}\|w_i - x_i\| \\
&\quad + \frac{1}{(1-\alpha_i)\beta_i}\|L_i t_i - x_i\|
\end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}
&\left(1 - \frac{1}{(1-\alpha_i)\beta_i}\right)\|L_i t_i - x_i\| \\
&\leqslant \frac{\alpha_i}{(1-\alpha_i)\beta_i}\|L_i t_i - x_0\| + \frac{1}{(1-\alpha_i)\beta_i}\|w_i - x_i\|
\end{aligned} \tag{3.38}$$

由于 L_i 是非扩张的且 $x^* \in Fix(L_i)$, 所以

$$\begin{aligned}
&\|L_i t_i - x_0\| \\
&\leqslant \|L_i t_i - x^*\| + \|x^* - x_0\| \\
&\leqslant \|L_i t_i - L_i x^*\| + \|x^* - x_0\| \\
&\leqslant \|t_i - x^*\| + \|x^* - x_0\|
\end{aligned}$$

因此, 从 $\{t_i\}$ 有界可知 $\|L_i t_i - x_0\|$ 有界. 从而由式 (3.38) 知

$$\|L_i t_i - x_i\| \to 0 \tag{3.39}$$

因为

$$\begin{aligned}
&\|L_i x_i - x_i\| \\
&\leqslant \|L_i x_i - L_i t_i\| + \|L_i t_i - x_i\| \\
&\leqslant \|x_i - t_i\| + \|L_i t_i - x_i\|
\end{aligned}$$

故从式 (3.37) 和式 (3.39) 可知

$$\|L_i x_i - x_i\| \to 0 \tag{3.40}$$

第二步: 令 $(v,u) \in G(T)$, 则

$$u \in A(v) = N_K(v) + T(v)$$

从而

$$u - T(v) \in N_K(v)$$

因此

$$\langle v - x, u - T(v)\rangle \geqslant 0, \quad \forall x \in K \tag{3.41}$$

令 $x = x_i - T(x_i)$, $y = v$, 由引理 1.3(i) 知

$$\langle x_i - T(x_i) - \mathcal{P}_K(x_i - T(x_i)), \mathcal{P}_K(x_i - T(x_i)) - v\rangle \geqslant 0$$

即

$$\langle x_i - T(x_i) - y_i, y_i - v\rangle \geqslant 0 \tag{3.42}$$

因为 $t_i \in K$, 故由式 (3.41) 有

$$\langle v - t_i, u - T(v)\rangle \geqslant 0 \tag{3.43}$$

根据 $\{x_i\}$ 的有界性和 T 的连续性知, $\{y_i\},\{z_i\}$ 和 $\{T(z_i)\}$ 是有界的. 根据 $\{\alpha_i\}$ 和 $\{\beta_i\}$ 的假设, 由式 (3.24) 知

$$\lim_{i\to\infty} \eta_i \|r(x_i)\|^2 = 0 \tag{3.44}$$

如果 $\limsup\limits_{i\to\infty} \eta_i = 0$, 那么 $\liminf\limits_{i\to\infty} \|r(x_i)\|^2 = 0$. 因此, 存在 $\{x_i\}$ 的一个弱聚点 $\overline{x}$ 且分别存在 $\{x_i\}$ 和 $\{y_i\}$ 两个子序列 $\{x_{i_j}\}$ 和 $\{y_{i_j}\}$, 使得

$$\lim_{i\to\infty} \|x_{i_j} - y_{i_j}\| = 0 \tag{3.45}$$

和

$$x_{i_j} \rightharpoonup \overline{x}, \quad j \to \infty \tag{3.46}$$

由于

$$\|y_{i_j} - t_{i_j}\| \leqslant \|y_{i_j} - x_{i_j}\| + \|x_{i_j} - t_{i_j}\|$$

故由式 (3.37) 和式 (3.45) 知

$$\lim_{i\to\infty}\|y_{i_j}-t_{i_j}\|=0 \tag{3.47}$$

从而由式 (3.43) 可得

$$\begin{aligned}\langle v-t_{i_j},u\rangle &\geqslant \langle v-t_{i_j},T(v)\rangle\\ &\geqslant \langle v-t_{i_j},T(v)\rangle-\langle x_{i_j}-T(x_{i_j})-y_{i_j},y_{i_j}-v\rangle\\ &=\langle v-t_{i_j},T(v)-T(t_{i_j})\rangle+\langle v-t_{i_j},T(t_{i_j})\rangle\\ &\quad-\langle v-y_{i_j},y_{i_j}-x_{i_j}\rangle-\langle v-y_{i_j},T(x_{i_j})\rangle\\ &\geqslant \langle v-t_{i_j},T(t_{i_j})\rangle-\langle v-y_{i_j},y_{i_j}-x_{i_j}\rangle-\langle v-y_{i_j},T(x_{i_j})\rangle\end{aligned} \tag{3.48}$$

其中, 最后一个不等式可根据 T 的单调性得到.

由于 T 是连续的, 对式 (3.48) 取极限有

$$\langle v-\overline{x},u\rangle\geqslant 0$$

因为 T 是极大单调的, 所以 $\overline{x}\in T^{-1}(0)$, 故 $\overline{x}\in \mathrm{VI}(T,K)$.

假设 $\lim\limits_{i\to\infty}\eta_i=0$. 根据 η_i 的选择, 由式 (3.21) 知

$$\begin{aligned}\delta\|r(x_i)\|^2 &< \langle T(x_i)-T(x_i-\gamma^{n_i-1}r(x_i))\rangle\\ &=\langle T(x_i)-T(x_i-\gamma^{-1}\eta_i r(x_i))\rangle\end{aligned} \tag{3.49}$$

在式 (3.49) 中令 $i\to\infty$, 由 $\{x_i\}$ 有界并根据 $r(\cdot)$ 和 T 的连续性有

$$x_i-y_i=r(x_i)\to 0$$

类似前一种情况的证明, 可得 $\overline{x}\in \mathrm{VI}(T,K)$.

第三步: $\overline{x}\in\mathcal{F}$.

假设 $T\overline{x}\neq\overline{x}$. 由引理 1.19 和引理 1.17 知

$$\begin{aligned}&\liminf_{j\to\infty}\|x_{i_j}-\overline{x}\|\\ &<\liminf_{j\to\infty}\|x_{i_j}-T\overline{x}\|\\ &\leqslant\liminf_{j\to\infty}(\|x_{i_j}-L_{i_j}x_{i_j}\|+\|L_{i_j}x_{i_j}-Tx_{i_j}\|+\|Tx_{i_j}-T\overline{x}\|)\\ &\leqslant\liminf_{j\to\infty}(\|x_{i_j}-L_{i_j}x_{i_j}\|+\|L_{i_j}x_{i_j}-Tx_{i_j}\|+\|x_{i_j}-\overline{x}\|)\end{aligned} \tag{3.50}$$

由于 $\{x_i\}$ 是有界的和 $\{S_i\}$ 是非扩张的, 则存在 $C>0$ 使得 $C=\sup\limits_{i\geqslant 1}\|S_ix_i\|<\infty$. 因此

$$\begin{aligned}
&\|L_ix_i-Tx_i\|\\
=&\left\|\frac{1}{s_i}\sum_{j=1}^{i}k_jS_jx_i-\frac{1}{k}\sum_{j=1}^{\infty}k_jS_jx_i\right\|\\
\leqslant&\left\|\frac{1}{s_i}\sum_{j=1}^{i}k_jS_jx_i-\frac{1}{k}\sum_{j=1}^{i}k_jS_jx_i\right\|+\left\|\frac{1}{k}\sum_{j=i+1}^{\infty}k_jS_jx_i\right\|\\
\leqslant&\frac{k-s_i}{ks_i}\sum_{j=1}^{i}k_j\|S_jx_i\|+\frac{1}{k}\sum_{j=i+1}^{\infty}k_j\|S_jx_i\|\\
\leqslant&\frac{C(k-s_i)}{k}+\frac{C}{k}\sum_{j=i+1}^{\infty}k_j\\
=&2\frac{C}{k}\sum_{j=i+1}^{\infty}k_j
\end{aligned}$$

由于当 $i\to\infty$ 时 $\sum\limits_{j=i+1}^{\infty}k_j\to 0$, 故

$$\lim_{i\to\infty}\|L_ix_i-Tx_i\|=0 \tag{3.51}$$

因此由式 (3.40) 和式 (3.51) 可得

$$\liminf_{j\to\infty}\|x_{i_j}-\overline{x}\|<\liminf_{j\to\infty}\|x_{i_j}-\overline{x}\|$$

矛盾, 故得证.

第四步：唯一性.

设 $\{x_{i_k}\}$ 是 $\{x_i\}$ 的另一个子序列且 $x_{i_k}\rightharpoonup\widetilde{x}$. 假设 $\overline{x}\neq\widetilde{x}$, 根据 Opial's 条件得

$$\begin{aligned}
&\lim_{i\to\infty}\|x_i-\overline{x}\|\\
=&\liminf_{j\to\infty}\|x_{i_j}-\overline{x}\|<\liminf_{j\to\infty}\|x_{i_j}-\widetilde{x}\|=\lim_{i\to\infty}\|x_i-\widetilde{x}\|\\
=&\liminf_{k\to\infty}\|x_{i_k}-\widetilde{x}\|<\liminf_{k\to\infty}\|x_{i_k}-\overline{x}\|=\lim_{i\to\infty}\|x_i-\overline{x}\|
\end{aligned}$$

矛盾, 故得证.

3.3　严格伪压缩映射的不动点

令

$$r_\mu(x):=x-\mathcal{P}_K(x-\mu T(x))$$

其中, $\mu > 0$ 为常数. 根据引理 1.3(i), 易知

$$x \in \mathrm{VI}(T, K) \Leftrightarrow r_\mu(x) = 0 \tag{3.52}$$

易证

$$\begin{aligned}\|\lambda x + (1-\lambda)y\|^2 = \lambda\|x\|^2 + (1-\lambda)\|y\|^2 \\ -\lambda(1-\lambda)\|x-y\|^2, \quad \forall \lambda \in [0,1], \forall x, y \in H\end{aligned} \tag{3.53}$$

现在我们给出寻找 $\mathrm{VI}(T, K) \cap F(S)$ 公共元素的如下混合次梯度超梯度算法.

算法 3.2 选取 $x_0 \in K$ ，参数 $\mu > 0$ 和序列 $\{\alpha_n\} \subset (0,1], \{\beta_n\} \subset (0,1)$. 令 $i = 0$.

步骤 1. 计算

$$y_i = \mathcal{P}_K(x_i - \mu T(x_i)) \tag{3.54}$$

若 $r_\mu(x_i) = 0$, 则 $x_i \in \mathrm{VI}(T, K)$.

步骤 2. 计算 $z_i := \mathcal{P}_{H_i}(x_i - \mu T(y_i))$, 其中

$$H_i := \{x \in H : \langle (x_i - \mu T(x_i)) - y_i, x - y_i \rangle \leqslant 0\} \tag{3.55}$$

步骤 3. 计算

$$w_i := (1-\alpha_i)x_i + \alpha_i[(1-\beta_i)z_i + \beta_i S z_i] \tag{3.56}$$

如果 $y_i = x_i$ 和 $w_i = x_i$, 则 $x_i \in \mathrm{VI}(T, K) \cap F(S)$.

步骤 4. 计算 $x_{i+1} := \mathcal{P}_{C_i \cap D_i}(x_0)$, 其中

$$\begin{aligned}C_i &:= \{x \in K : \langle x_i - x, x_0 - x_i \rangle \geqslant 0\} \\ D_i &:= \{x \in K : \|w_i - x\| \leqslant \|x_i - x\|\}\end{aligned}$$

令 $i := i + 1$, 回到步骤 1.

注解 3.2 步骤 2 中的 H_i 是半空间, 其边界超平面在点 y_i 支撑集合 K.

注解 3.3 根据引理 1.3(i) 和式 (3.54) 有

$$\langle (x_i - \mu T(x_i)) - y_i, x - y_i \rangle \leqslant 0, \quad \forall x \in K$$

故 $K \subseteq H_i$.

在后续证明中, 我们需要下面的假定:

(A1) $T: K \to H$ 是单调的;

(A2) T 是 γ-Lipschitz 连续的, 其中 $0 < \gamma < 1/\mu$;

(A3) 参数序列 $\{\alpha_n\}$ 和 $\{\beta_n\}$ 满足下面的条件:

$$0 < \liminf_{i\to\infty} \alpha_i \leqslant \limsup_{i\to\infty} \alpha_i \leqslant 1$$
$$0 < \liminf_{i\to\infty} \beta_i \leqslant \limsup_{i\to\infty} \beta_i < 1$$

(A4)$S: K \to K$ 是 θ-严格伪压缩映射, 其中 $\theta \in [0, 1-\beta)$,$\beta := \limsup\limits_{i\to\infty} \beta_i$.

注解 3.4　如果 T 是单调的, 则 T 是伪单调的. 而且, 如果映射 T 是伪单调的, 则对任意 $x^* \in \mathrm{VI}(T, K)$, 有

$$\langle Tx, x - x^* \rangle \geqslant 0, \quad \forall x \in K$$

因此, 解集 $\mathrm{VI}(T, K)$ 能被刻画为一族半空间的交集, 这意味着解集 $\mathrm{VI}(T, K)$ 是闭凸集. 所以, 根据引理 1.4, 如果 $\mathrm{VI}(T, K) \cap F(S) \neq \varnothing$, 则集合 $\mathrm{VI}(T, K) \cap F(S)$ 是闭凸集.

下面的命题表明算法 3.2 中终止准则是合理的.

命题 3.8　如果 $r_\mu(x_i) = 0$, 则 $x_i \in \mathrm{VI}(T, K)$; 如果 $y_i = x_i$ 且 $w_i = x_i$, 则 $x_i \in \mathrm{VI}(T, K) \cap F(S)$.

证明　如果 $r_\mu(x_i) = 0$, 则根据式 (3.52) 有 $x_i \in \mathrm{VI}(T, K)$. 如果 $y_i = x_i$, 则 $r_\mu(x_i) = 0$, 且

$$z_i := \mathcal{P}_{H_i}(x_i - \mu T(x_i)) \tag{3.57}$$

根据引理 1.3(i) 和式 (3.57) 有

$$\langle y - z_i, x_i - \mu T(x_i) - z_i \rangle \leqslant 0, \quad \forall y \in H_i \tag{3.58}$$

根据注解 3.2 和式 (3.54) 有 $y_i \in K \subseteq H_i$. 在式 (3.58) 中令 $y := y_i$ 有

$$\langle y_i - z_i, x_i - \mu T(x_i) - z_i \rangle \leqslant 0 \tag{3.59}$$

根据 H_i 的定义有

$$\langle z_i - y_i, x_i - \mu T(x_i) - y_i \rangle \leqslant 0 \tag{3.60}$$

根据式 (3.59) 和式 (3.60) 有 $\|y_i - z_i\|^2 \leqslant 0$, 因此 $\|y_i - z_i\|^2 = 0$. 所以 $y_i = z_i$. 如果 $w_i = x_i$, 则根据式 (3.56) 有 $Sx_i = x_i$, 故 $x_i \in F(S)$.

下面的三个命题在证明算法 3.2 所产生的序列 $\{x_i\}$ 的收敛性时起着关键的作用.

命题 3.9 设 $S: K \to K$ 是θ-严格伪压缩映射. 如果$x^* \in \mathrm{VI}(T,K) \cap F(S)$, 则

$$\begin{aligned}\|w_i - x^*\|^2 \leqslant &(1-\alpha_i)\|x_i - x^*\|^2 + \alpha_i\|z_i - x^*\|^2 \\ &-\alpha_i\beta_i(1-\theta-\beta_i)\|Sz_i - z_i\|^2\end{aligned} \tag{3.61}$$

证明 设 $x^* \in \mathrm{VI}(T,K) \cap F(S)$. 根据 $\|\cdot\|^2$ 的凸性和式 (3.53) 有

$$\begin{aligned}\|w_i - x^*\|^2 &= \|(1-\alpha_i)(x_i - x^*) + \alpha_i[(1-\beta_i)z_i + \beta_i Sz_i - x^*]\|^2 \\ &\leqslant (1-\alpha_i)\|x_i - x^*\|^2 + \alpha_i\|(1-\beta_i)z_i + \beta_i Sz_i - x^*\|^2 \\ &= (1-\alpha_i)\|x_i - x^*\|^2 + \alpha_i\|(1-\beta_i)(z_i - x^*) + \beta_i(Sz_i - x^*)\|^2 \\ &= (1-\alpha_i)\|x_i - x^*\|^2 + \alpha_i[(1-\beta_i)\|z_i - x^*\|^2 \\ &\quad + \beta_i\|Sz_i - x^*\|^2 - \beta_i(1-\beta_i)\|Sz_i - z_i\|^2] \\ &\leqslant (1-\alpha_i)\|x_i - x^*\|^2 + \alpha_i[(1-\beta_i)\|z_i - x^*\|^2 + \beta_i\|z_i - x^*\|^2 \\ &\quad + \theta\beta_i\|Sz_i - z_i\|^2 - \beta_i(1-\beta_i)\|Sz_i - z_i\|^2] \\ &= (1-\alpha_i)\|x_i - x^*\|^2 + \alpha_i\|z_i - x^*\|^2 \\ &\quad - \alpha_i\beta_i(1-\theta-\beta_i)\|Sz_i - z_i\|^2\end{aligned}$$

其中, 第二个不等式是根据映射 S 的 θ-严格伪压缩性质.

命题 3.10 设映射 T 是单调的,S 是 θ-严格伪压缩映射. 如果 $x^* \in \mathrm{VI}(T,K) \cap F(S)$ 且 $\mu\gamma < 1$, 则

(i) $\|z_i - x^*\|^2 \leqslant \|x_i - x^*\|^2 - (1-\mu^2\gamma^2)\|r_\mu(x_i)\|^2$;

(ii) $\|w_i - x^*\|^2 \leqslant \|x_i - x^*\|^2 - (1-\mu^2\gamma^2)\alpha_i\|r_\mu(x_i)\|^2 - \alpha_i\beta_i(1-\theta-\beta_i)\|Sz_i - z_i\|^2$.

证明 由于 $x^* \in \mathrm{VI}(T,K)$ 和 $y_i \in K$, 故

$$\langle T(x^*), y_i - x^*\rangle \geqslant 0$$

根据映射 T 的单调性有

$$\langle T(y_i), y_i - x^*\rangle \geqslant 0$$

因此

$$\langle T(y_i), z_i - x^*\rangle \geqslant \langle T(y_i), z_i - y_i\rangle \tag{3.62}$$

根据步骤 2 有

$$\langle z_i - y_i, (x_i - \mu T(x_i)) - y_i \rangle \leqslant 0$$

所以

$$\begin{aligned}
&\langle z_i - y_i, (x_i - \mu T(y_i)) - y_i \rangle \\
=& \langle z_i - y_i, x_i - \mu T(x_i) - y_i \rangle \\
&+\mu \langle z_i - y_i, T(x_i) - T(y_i) \rangle \\
\leqslant& \mu \langle z_i - y_i, T(x_i) - T(y_i) \rangle
\end{aligned} \tag{3.63}$$

记 $q_i = x_i - \mu T(y_i)$, 则有

$$\begin{aligned}
&\|q_i - x^*\|^2 \\
=& \|\mathcal{P}_K(q_i) - x^*\|^2 \\
=& \langle \mathcal{P}_K(q_i) - q_i + q_i - x^*, \mathcal{P}_K(q_i) - q_i + q_i - x^* \rangle \\
=& \|q_i - x^*\|^2 + \|q_i - \mathcal{P}_K(q_i)\|^2 \\
&+2\langle \mathcal{P}_K(q_i) - q_i, q_i - x^* \rangle
\end{aligned}$$

由于

$$\begin{aligned}
&2\|q_i - \mathcal{P}_K(q_i)\|^2 + 2\langle \mathcal{P}_K(q_i) - q_i, q_i - x^* \rangle \\
=& 2\langle q_i - \mathcal{P}_K(q_i), x^* - \mathcal{P}_K(q_i) \rangle \leqslant 0
\end{aligned}$$

故

$$\begin{aligned}
&\|q_i - \mathcal{P}_K(q_i)\|^2 + 2\langle \mathcal{P}_K(q_i) - q_i, q_i - x^* \rangle \\
\leqslant& -\|q_i - \mathcal{P}_K(q_i)\|^2
\end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}
&\|z_i - x^*\|^2 \\
\leqslant& \|q_i - x^*\|^2 - \|q_i - \mathcal{P}_K(q_i)\|^2 \\
=& \|(x_i - \mu T(y_i)) - x^*\|^2 - \|(x_i - \mu T(y_i)) - \mathcal{P}_K(q_i)\|^2 \\
=& \|x_i - x^*\|^2 - \|x_i - z_i\|^2 + 2\mu \langle x^* - z_i, T(y_i) \rangle \\
\leqslant& \|x_i - x^*\|^2 - \|x_i - z_i\|^2 + 2\mu \langle y_i - z_i, T(y_i) \rangle
\end{aligned}$$

其中, 最后一个不等式是根据式 (3.62). 因此

$$
\begin{aligned}
&\|z_i - x^*\|^2 \\
\leqslant &\|x_i - x^*\|^2 - \|x_i - z_i\|^2 + 2\mu\langle y_i - z_i, T(y_i)\rangle \\
= &\|x_i - x^*\|^2 - \langle x_i - y_i + y_i - z_i, x_i - y_i + y_i - z_i\rangle \\
&+2\mu\langle y_i - z_i, T(y_i)\rangle \\
= &\|x_i - x^*\|^2 - \|r_\mu(x_i)\|^2 - \|y_i - z_i\|^2 \\
&+2\langle z_i - y_i, x_i - \mu T(y_i) - y_i\rangle \\
\leqslant &\|x_i - x^*\|^2 - \|r_\mu(x_i)\|^2 - \|y_i - z_i\|^2 \\
&+2\mu\langle z_i - y_i, T(x_i) - T(y_i)\rangle \\
\leqslant &\|x_i - x^*\|^2 - \|r_\mu(x_i)\|^2 - \|y_i - z_i\|^2 \\
&+2\mu\gamma\|z_i - y_i\|\|r_\mu(x_i)\|
\end{aligned}
\tag{3.64}
$$

其中, 第二个不等式是根据式 (3.63), 最后一个不等式是根据 Cauchy-Schwarz 不等式和 T 的 Lipschitz 连续性.

由于

$$
\begin{aligned}
&(\mu\gamma\|r_\mu(x_i)\| - \|z_i - y_i\|)^2 \\
= &(\mu\gamma)^2\|r_\mu(x_i)\|^2 - 2\mu\gamma\|z_i - y_i\|\|r_\mu(x_i)\| + \|y_i - z_i\|^2 \\
\geqslant &0
\end{aligned}
$$

故

$$
2\mu\gamma\|z_i - y_i\|\|r_\mu(x_i)\| \leqslant (\mu\gamma)^2\|r_\mu(x_i)\|^2 + \|y_i - z_i\|^2 \tag{3.65}
$$

结合式 (3.64) 和式 (3.65) 有

$$
\begin{aligned}
&\|z_i - x^*\|^2 \\
\leqslant &\|x_i - x^*\|^2 - (1 - \mu^2\gamma^2)\|r^i_\mu(x_i)\|^2
\end{aligned}
\tag{3.66}
$$

(ii) 结合 (i) 和式 (3.61) 即可得结论.

命题 3.11 如果 $\Omega := \mathrm{VI}(T, K) \cap F(S) \neq \varnothing$, 则

(i) x_{i+1} 是有定义的;

(ii) $\|x_i - x_0\| \leqslant \|x_{i+1} - x_0\| \leqslant \|x_0 - \mathcal{P}_\Omega(x_0)\|$.

证明　(i) 只需证明 $C_i \cap D_i$ 是 H 的非空闭凸子集.

首先证明, 对每个 $i \in \mathbb{N}$, $C_i \cap D_i$ 是 H 非空闭凸子集. 显而易见, 对每个 $i \in \mathbb{N}$,C_i 是闭凸集,D_i 是闭集. 由于

$$D_i = \left\{ x \in K : \left\langle w_i - x_i, \frac{w_i + x_i}{2} - x \right\rangle \leqslant 0 \right\}$$

故对每个 $i \in \mathbb{N}$,D_i 也是凸集.

接下来, 通过对 i 运用归纳证明 $\Omega \subset C_i \cap D_i$ 是非空的, 从而 $C_i \cap D_i$ 是非空的. 根据命题 3.10(ii) 可知, 对每个 $i \in \mathbb{N}$, $\Omega \subset D_i$. 对 $i = 0$, 有 $C_0 = K$, 因此 $\Omega \subset C_0 \cap D_0$. 现假定给定 x_i, 且对某个 $i \in \mathbb{N}$, $\Omega \subset C_i \cap D_i$. 由于 $x_{i+1} = \mathcal{P}_{C_i \cap D_i}(x_0)$ 和 $\Omega \subset C_i \cap D_i$, 故从引理 1.3(i) 可得

$$\langle x_{i+1} - x, x_0 - x_{i+1} \rangle \geqslant 0, \quad \forall x \in \Omega$$

因此,$\Omega \in C_{i+1}$, 进而 $\Omega \in C_{i+1} \cap D_{i+1}$.

(ii) 由于

$$\langle x_i - x, x_0 - x_i \rangle \geqslant 0, \quad \forall x \in C_i$$

故 $x_i = \mathcal{P}_{C_i}(x_0)$. 由此从 $x_{i+1} \in C_i$ 可得

$$\|x_i - x_0\| = \|\mathcal{P}_{C_i}(x_0) - x_0\| \leqslant \|x_{i+1} - x_0\| \tag{3.67}$$

注意到 $\mathcal{P}_\Omega(x_0) \in \Omega \subset C_{i+1}$, 因此

$$\|x_{i+1} - x_0\| = \|\mathcal{P}_{C_{i+1}}(x_0) - x_0\| \leqslant \|\mathcal{P}_\Omega(x_0) - x_0\| \tag{3.68}$$

所以根据式 (3.67) 和式 (3.68) 有

$$\|x_i - x_0\| \leqslant \|x_{i+1} - x_0\| \leqslant \|x_0 - \mathcal{P}_\Omega(x_0)\|$$

下面的定理证明了算法 3.2 产生的序列 $\{x_i\}$ 强收敛到 $\mathrm{VI}(T, K) \cap F(S)$ 中的某个元素.

定理 3.12　设 K 是 H 的非空闭凸子集. 如果假定 (A1)~ (A4) 成立, 且 $\Omega := \mathrm{VI}(T, K) \cap F(S) \neq \varnothing$, 则算法 3.2 产生的无限序列 $\{x_i\}$ 强收敛到 $\mathcal{P}_\Omega(x_0)$.

证明　根据引理 1.5 和命题 3.10(ii), 只需证明 $\omega_w(x_i) \subset \Omega$, 即 $\{x_i\}$ 的每个弱聚点均属于 Ω. 证明过程分为以下几步.

第一步: $\|x_{i+1} - x_i\| \to 0, \|w_i - x_i\| \to 0, \|r_\mu(x_i)\| \to 0, \|Sz_i - z_i\| \to 0.$

根据 C_i 的定义有

$$\langle x_i - x_{i+1}, x_0 - x_i \rangle \geqslant 0 \tag{3.69}$$

注意到

$$\|x_{i+1} - x_0\|^2 = \|x_{i+1} - x_i\|^2 + \|x_i - x_0\|^2 + 2\langle x_{i+1} - x_i, x_i - x_0 \rangle \tag{3.70}$$

结合式 (3.69) 和式 (3.70) 有

$$\|x_{i+1} - x_i\|^2 \leqslant \|x_{i+1} - x_0\|^2 - \|x_i - x_0\|^2 \tag{3.71}$$

根据命题 3.10(ii), 序列 $\{\|x_i - x_0\|\}$ 收敛. 在式 (3.71) 中令 $i \to \infty$, 有

$$\|x_{i+1} - x_i\| \to 0 \tag{3.72}$$

由于 $x_{i+1} \in D_i$, 故 $\|w_i - x_{i+1}\| \leqslant \|x_i - x_{i+1}\|$. 因此

$$\|w_i - x_i\| \leqslant \|w_i - x_{i+1}\| + \|x_{i+1} - x_i\| \leqslant 2\|x_{i+1} - x_i\| \tag{3.73}$$

根据式 (3.72) 和式 (3.73), 我们推断出 $\|w_i - x_i\| \to 0$. 令 $x^* \in \Omega$. 因此从命题 3.10(ii) 可知, 对每个 $i \in \mathbb{N}$, 有

$$(1 - \mu^2\gamma^2)\alpha_i\|r_\mu(x_i)\|^2 \leqslant \|w_i - x_i\|[\|w_i - x^*\| + \|x_i - x^*\|] \tag{3.74}$$

$$\alpha_i\beta_i(1 - \theta - \beta_i)\|Sz_i - z_i\|^2 \leqslant \|w_i - x_i\|[\|w_i - x^*\| + \|x_i - x^*\|] \tag{3.75}$$

故从命题 3.10(ii) 可知序列 $\{x_i\}$ 有界, 从而序列 $\{w_i\}$ 有界. 由于 $\liminf\limits_{i\to\infty} \alpha_i > 0$, 故从式 (3.74) 可得

$$\|r_\mu(x_i)\| \to 0 \tag{3.76}$$

此外, 由于 $\liminf\limits_{i\to\infty} \beta_i > 0$ 和

$$\liminf_{i\to\infty}(1 - \theta - \beta_i) \geqslant 1 - \theta - \limsup_{i\to\infty} \beta_i = 1 - \theta - \beta > 0$$

故从式 (3.75) 可得 $\|Sz_i - z_i\| \to 0$.

第二步: $\overline{x} \in Fix(S)$.

从命题 3.8 的证明过程可知

$$\mathcal{P}_K(x_i - \mu T(x_i)) = \mathcal{P}_{H_i}(x_i - \mu T(x_i)) \tag{3.77}$$

所以

$$\begin{aligned}\|x_i - z_i\| &\leqslant \|x_i - \mathcal{P}_K(x_i - \mu T(x_i))\| + \|\mathcal{P}_K(x_i - \mu T(x_i)) - \mathcal{P}_{H_i}(x_i - \mu T(y_i))\| \\ &= \|r_\mu(x_i)\| + \|\mathcal{P}_{H_i}(x_i - \mu T(x_i)) - \mathcal{P}_{H_i}(x_i - \mu T(y_i))\| \\ &\leqslant \|r_\mu(x_i)\| + \mu\|T(x_i) - T(y_i)\| \\ &\leqslant (1+\mu\gamma)\|r_\mu(x_i)\| \end{aligned} \tag{3.78}$$

其中, 第二个不等式是根据 $\mathcal{P}_{H_i}$ 的非扩张性, 最后一个不等式是根据的 T 的 Lipschitz 连续性. 根据式 (3.76) 有 $\|x_i - z_i\| \to 0$. 假设存在 $\{x_i\}$ 的子序列 $\{x_{i_j}\}$ 使得 $x_{i_j} \rightharpoonup \overline{x}$, 因此 $z_{i_j} \rightharpoonup \overline{x}$. 由于 $\|Sz_{i_j} - z_{i_j}\| \to 0$, 根据引理 1.5 有 $S\overline{x} - \overline{x} = 0$, 即 $\overline{x} \in Fix(S)$.

第三步: $\overline{x} \in \mathrm{VI}(T, K)$.

由于 $r_\mu(x_i) = x_i - y_i \to 0$, 故 $y_{i_j} \rightharpoonup \overline{x}$. 另一方面, T 的 Lipschitz 连续性蕴含

$$Tx_{i_j} - Ty_{i_j} \to 0$$

令

$$Ax := \begin{cases} Tx + N_K(x), & x \in K \\ \varnothing, & x \notin K \end{cases}$$

则 T 是极大单调的. 令 $(x, u) \in G(A)$. 由于 $u - Tx \in N_K(x)$ 和 $y_{i_j} \in K$, 故

$$\langle y_{i_j} - x, u - Tx \rangle \leqslant 0 \tag{3.79}$$

由于 $x \in K$, 故从式 (3.54) 可得

$$\langle x - y_{i_j}, x_{i_j} - \mu Tx_{i_j} - y_{i_j} \rangle \leqslant 0$$

从而

$$\langle x - y_{i_j}, Tx_{i_j} + (y_{i_j} - x_{i_j})/\mu \rangle \geqslant 0$$

所以, 从式 (3.79) 可得

$$\begin{aligned}\langle x - y_{i_j}, u \rangle &\geqslant \langle x - y_{i_j}, Tx \rangle \\ &\geqslant \langle x - y_{i_j}, Tx \rangle - \langle x - y_{i_j}, Tx_{i_j} + (y_{i_j} - x_{i_j})/\mu \rangle \\ &\geqslant \langle x - y_{i_j}, Ty_{i_j} - Tx_{i_j} \rangle - \langle x - y_{i_j}, (y_{i_j} - x_{i_j})/\mu \rangle \end{aligned} \tag{3.80}$$

在式 (3.80) 中令 $j \to \infty$, 有

$$\langle x - \overline{x}, u \rangle \geqslant 0$$

根据映射 A 的极大单调性有 $\overline{x} \in T^{-1}0$, 因此 $\overline{x} \in \mathrm{VI}(T, K)$.

接下来我们给出寻找 $\mathrm{VI}(T, K) \cap F(S)$ 公共元素的次梯度超梯度算法.

算法 3.3 选取 $x_0 \in K$, 参数 $\mu > 0$ 和序列 $\{\alpha_n\} \subset (0, 1], \{\beta_n\} \subset (0, 1)$. 令 $i = 0$.

步骤 1. 计算

$$y_i = \mathcal{P}_K(x_i - \mu T(x_i))$$

如果 $r_\mu(x_i) = 0$, 则 $x_i \in \mathrm{VI}(T, K)$.

步骤 2. 计算 $z_i := \mathcal{P}_{H_i}(x_i - \mu T(y_i))$, 其中

$$H_i := \{x \in \mathbb{H} : \langle (x_i - \mu T(x_i)) - y_i, x - y_i \rangle \leqslant 0\}$$

步骤 3. 计算

$$x_{i+1} := (1 - \alpha_i)x_i + \alpha_i[(1 - \beta_i)z_i + \beta_i S z_i]$$

如果 $y_i = x_i$ 和 $x_{i+1} = x_i$, 则 $x_i \in \mathrm{VI}(T, K) \cap F(S)$.

下面的定理表明, 算法 3.3 产生的序列 $\{x_i\}$ 弱收敛到 $\mathrm{VI}(T, K) \cap F(S)$ 中的某个元素.

定理 3.13 设 K 是 H 的非空闭凸子集. 如果假定 (A1)~(A4) 成立, 且 $\Omega := \mathrm{VI}(T, K) \cap F(S) \neq \varnothing$, 则算法 3.3 产生的无限序列 $\{x_i\}$ 弱收敛到 $\overline{x}$, 其中 $\overline{x} = \lim\limits_{i \to \infty} \mathcal{P}_\Omega(x_i)$.

证明 类似于命题 3.9(ii) 的证明, 对所有 $x^* \in \Omega$, 有

$$\begin{aligned} \|x_{i+1} - x^*\|^2 \leqslant & \|x_i - x^*\|^2 - (1 - \mu^2\gamma^2)\alpha_i \|r_\mu(x_i)\|^2 \\ & -\alpha_i\beta_i(1 - \theta - \beta_i)\|Sz_i - z_i\|^2 \end{aligned} \tag{3.81}$$

所以序列 $\{\|x_i - x^*\|\}$ 收敛. 因而, 从式 (3.81) 可得

$$\begin{aligned} (1 - \mu^2\gamma^2)\alpha_i \|r_\mu(x_i)\|^2 \leqslant \|x_i - x^*\|^2 - \|x_{i+1} - x^*\|^2 \to 0, \quad i \to \infty \\ \alpha_i\beta_i(1 - \theta - \beta_i)\|Sz_i - z_i\|^2 \leqslant \|x_i - x^*\|^2 - \|x_{i+1} - x^*\|^2 \to 0, \quad i \to \infty \end{aligned}$$

类似于定理 3.12 的证明, 我们有 $\|r_\mu(x_i)\| \to 0$ 和 $\|Sz_i - z_i\| \to 0$, 因此 $\omega_w(x_i) \subset \Omega$. 接下来证明

$$x_i \rightharpoonup \overline{x} \in \Omega$$

设 $\{x_{i_k}\}$ 是 $\{x_i\}$ 的另一个子序列, 其满足 $x_{i_k} \rightharpoonup \widetilde{x}$. 则 $\widetilde{x} \in \Omega$. 假定 $\overline{x} \neq \widetilde{x}$. 根据 Opial′ s 条件有

$$\begin{aligned}\lim_{i\to\infty}\|x_i-\overline{x}\| &= \liminf_{j\to\infty}\|x_{i_j}-\overline{x}\|\\ &< \liminf_{j\to\infty}\|x_{i_j}-\widetilde{x}\|\\ &= \lim_{i\to\infty}\|x_i-\widetilde{x}\|\\ &= \liminf_{k\to\infty}\|x_{i_k}-\widetilde{x}\|\\ &< \liminf_{k\to\infty}\|x_{i_k}-\overline{x}\|\\ &= \lim_{i\to\infty}\|x_i-\overline{x}\|\end{aligned}$$

矛盾. 因此 $\overline{x} = \widetilde{x}$.

令 $t_i = \mathcal{P}_\Omega(x_i)$. 由于 $\overline{x} \in \Omega$, 故从引理 1.3(i) 可得

$$\langle \overline{x} - t_i, x_i - t_i \rangle \leqslant 0 \tag{3.82}$$

根据引理 1.21 可知, 序列 $\{t_i\}$ 强收敛到某个 $\widehat{x} \in \Omega$. 在式 (3.82) 中令 $i \to \infty$, 有

$$\langle \overline{x} - \widehat{x}, \overline{x} - \widehat{x} \rangle \leqslant 0$$

从而 $\overline{x} = \widehat{x}$. 因此, $\lim\limits_{i\to\infty} t_i = \overline{x}$.

第 4 章　集值变分不等式的投影算法

我们考虑变分不等式问题 (简记为 MVIP)：找 $x^* \in K$ 和 $\xi \in T(x^*)$ 使得

$$\langle \xi, x - x^* \rangle \geqslant 0, \quad \forall x \in K \tag{4.1}$$

其中, K 是有限维欧几里得空间 $\mathbb{R}^n$ 的一个非空闭凸集,$T : K \to 2^{\mathbb{R}^n}$ 是一个多值映射, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ 和 $\| \cdot \|$ 分别表示 $\mathbb{R}^n$ 中的内积和范数.

以下三类重要问题可以转化为变分不等式问题来研究:

(1) 当 T 为凸泛函 f 的次微分时, 变分不等式问题 (4.1) 等价于求 f 在 K 上的极小值.

(2) 当 $K = \mathbb{R}^n_+$ 时, 变分不等式问题 (4.1) 等价于非线性补问题: 找 $z \geqslant 0$ 和 $u \in T(z)$ 使得 $u \geqslant 0$ 和 $\langle u, z \rangle = 0$, 其中, $\mathbb{R}^n_+ = \{x = (x_1, \cdots, x_i, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n | x_i \geqslant 0, 1 \leqslant i \leqslant n\}$.

(3) 当 $K = \mathbb{R}^n$ 时, 变分不等式问题 (4.1) 等价于: 找 $x \in \mathbb{R}^n$ 使得 $0 \in T(x)$.

变分不等式的算法很多，如牛顿算法、近似点算法和投影算法等, 投影算法因其计算比较简单的特点, 吸引了许多学者借助其来研究变分不等式问题. 投影算法所产生序列收敛于变分不等式解的速度主要取决于以下三个方面:

(1) 超平面的选择, 其中该超平面严格分离当前迭代点和变分不等式解集合.

(2) 下一个迭代点产生方法的选择.

(3) 每次迭代所需投影次数: 每次投影次数越少, 收敛速度越快.

本章主要针对上述三个方面，介绍了集值变分不等式问题的超梯度算法、二次投影算法、修正超梯度算法、次梯度算法等四种不同的投影算法。

4.1　超梯度算法

首先介绍一个引理.

引理 4.1　*假设 $\mu > 0$ 是一个参变量, $x \in K$ 和 $\xi \in T(x)$ 是变分不等式 (4.1) 的解当且仅当*

$$r_\mu(x, \xi) := x - \mathcal{P}_K(x - \mu\xi) = 0$$

证明　$x \in K$ 和 $\xi \in T(x)$ 满足变分不等式 (4.1) 等价于

$$\langle x-(x-\mu\xi), y-x\rangle \geqslant 0, \quad \forall y \in K$$

由引理 1.1 即得结论.

根据引理 1.3 容易得到下面的结论.

引理 4.2　对每一 $x \in K$ 和 $\xi \in T(x)$, 有

$$\langle \xi, r_\mu(x,\xi)\rangle \geqslant \mu^{-1}\|r_\mu(x,\xi)\|^2 \tag{4.2}$$

在本章以及后面的四章中，如未作特别说明，我们均假设 T 是从 $\mathbb{R}^n$ 到自身的连续集值映射, 用 MVIP(T,K) 表示变分不等式问题 (4.1) 的解集. 我们总假设 MVIP$(T,K) \neq \varnothing$.T 满足下面的条件: 对所有 $y \in K$,$\zeta \in T(y)$ 和每一变分不等式的解 x, 有

$$\langle \zeta, y-x\rangle \geqslant 0 \tag{4.3}$$

特别地, 如果 T 是 Karamardian 定义的伪单调映射, 上面的条件 (4.3) 自然成立.

下面我们首先给出求解变分不等式问题 (4.1) 的算法.

算法 4.1　选取 $x_0 \in K$ 和参变量 $\sigma > 0, 0 < \mu < \min\{1, 1/\sigma\}$,$\gamma \in (0,1)$. 令 $i=0$.

步骤 1. 若存在 $\xi \in T(x_i)$ 使得 $r_\mu(x_i,\xi)=0$, 停止; 否则, 任意选取 $\xi_i \in T(x_i)$.

步骤 2. 设 k_i 是满足下面不等式的最小的非负整数:

$$\langle \xi_i - y_i, r_\mu(x_i,\xi_i)\rangle \leqslant \sigma\|r_\mu(x_i,\xi_i)\|^2 \tag{4.4}$$

其中, $y_i = \mathcal{P}_{T(x_i-\gamma^{k_i}r_\mu(x_i,\xi_i))}(\xi_i)$. 令 $\eta_i = \gamma^{k_i}$.

步骤 3. 计算 $x_{i+1} := \mathcal{P}_{C_i}(x_i)$, 其中

$$C_i := \{x \in K : h_i(x) \leqslant 0\}$$

$$h_i(x) := \langle y_i + \eta_i r_\mu(x_i,\xi_i), x-x_i\rangle + \eta_i\langle y_i - \mu\xi_i + r_\mu(x_i,\xi_i), r_\mu(x_i,\xi_i)\rangle \tag{4.5}$$

令 $i := i+1$ 并回到步骤 1.

注解 4.1　由于 T 是紧凸值的, 所以 T 是闭凸值的, 故步骤 2 中的 y_i 由 k_i 唯一确定.

下面的命题说明算法 4.1 是可行的.

引理 4.3　若 x_i 不是变分不等式问题 (4.1) 的解，则存在非负整数 k_i 满足式 (4.4).

证明 用反证法. 假设对所有的非负整数 k 有

$$\langle \xi_i - y_k, r_\mu(x_i, \xi_i)\rangle > \sigma \|r_\mu(x_i, \xi_i)\|^2 \tag{4.6}$$

其中

$$y_k = \mathcal{P}_{T(x_i - \gamma^k r_\mu(x_i, \xi_i))}(\xi_i)$$

由于 T 是下半连续的, $\xi_i \in T(x_i), x_i - \gamma^k r_\mu(x_i, \xi_i) \to x_i(k \to \infty)$, 所以存在 $u_k \in T(x_i - \gamma^k r_\mu(x_i, \xi_i)$ 使得 $\lim\limits_{k\to\infty} u_k = \xi_i$.

由于 $y_k = \mathcal{P}_{T(x_i - \gamma^k r_\mu(x_i, \xi_i))}(\xi_i)$, 所以

$$\|y_k - \xi_i\| \leqslant \|u_k - \xi_i\| \to 0, \quad k \to \infty$$

因此

$$\lim_{k\to\infty} y_k = \xi_i$$

在式 (4.6) 中令 $k \to \infty$ 有

$$0 = \|\xi_i - \xi_i\| \geqslant \sigma \|r_\mu(x_i, \xi_i)\| > 0$$

矛盾.

引理 4.4 假设 x^* 是变分不等式问题 (4.1) 的解, 函数 h_i 由式 (4.5) 所定义. 那么

$$h_i(x_i) \geqslant \eta_i(\mu^{-1} - \sigma)\|r_\mu(x_i, \xi_i)\|^2$$

$$h_i(x^*) \leqslant 0$$

特别地, 如果 $r_\mu(x_i, \xi_i) \neq 0$, 那么 $h_i(x_i) > 0$.

证明 由式 (4.5) 有

$$\begin{aligned} h_i(x_i) &= \eta_i\langle y_i - \mu\xi_i + r_\mu(x_i, \xi_i), r_\mu(x_i, \xi_i)\rangle \\ &= \eta_i\langle y_i, r_\mu(x_i, \xi_i)\rangle - \mu\eta_i\langle \xi_i, r_\mu(x_i, \xi_i)\rangle + \eta_i\|r_\mu(x_i, \xi_i)\|^2 \\ &\geqslant \eta_i(1-\mu)\langle \xi_i, r_\mu(x_i, \xi_i)\rangle + \eta_i(1-\sigma)\|r_\mu(x_i, \xi_i)\|^2 \\ &\geqslant (\mu^{-1} - \sigma)\eta_i\|r_\mu(x_i, \xi_i)\|^2 \end{aligned}$$

其中, 第一个不等式成立是根据式 (4.4), 第二个不等式成立是根据引理 4.2 和$\mu < 1$. 如果$r_\mu(x_i, \xi_i) \neq 0$, 那么$h_i(x_i) > 0$, 因为 $\mu < 1/\sigma$. 由 $r_\mu(x_i, \xi_i) = x_i - \mathcal{P}_K(x_i - \mu\xi_i)$有

$$\langle r_\mu(x_i, \xi_i) - \mu\xi_i, x^* - x_i + r_\mu(x_i, \xi_i)\rangle \leqslant 0 \tag{4.7}$$

另一方面, 由假定 (4.3) 有

$$\langle \mu\xi_i, x^* - x_i\rangle = \mu\langle \xi_i, x^* - x_i\rangle \leqslant 0 \tag{4.8}$$

由式 (4.7) 和式 (4.8) 有

$$\langle r_\mu(x_i,\xi_i), x^* - x_i\rangle \leqslant \langle r_\mu(x_i,\xi_i), \mu\xi_i - r_\mu(x_i,\xi_i)\rangle$$

从而有

$$\begin{aligned}
\langle y_i + \eta_i r_\mu(x_i,\xi_i), x^* - x_i\rangle &= \langle y_i, x^* - x_i\rangle + \eta_i\langle r_\mu(x_i,\xi_i), x^* - x_i\rangle \\
&\leqslant \langle y_i, x^* - x_i\rangle + \eta_i\langle r_\mu(x_i,\xi_i), \mu\xi_i - r_\mu(x_i,\xi_i)\rangle \\
&= \langle y_i, x^* - x_i + \eta_i r_\mu(x_i,\xi_i)\rangle \\
&\quad - \eta_i\langle y_i - \mu\xi_i + r_\mu(x_i,\xi_i), r_\mu(x_i,\xi_i)\rangle \\
&\leqslant -\eta_i\langle y_i - \mu\xi_i + r_\mu(x_i,\xi_i), r_\mu(x_i,\xi_i)\rangle
\end{aligned}$$

其中, 第二个不等式成立是根据假定 (4.3) 和 $y_i \in T(x_i - \eta_i r_\mu(x_i,\xi_i))$. 所以$h_i(x^*) \leqslant 0$.

定理 4.5 假设 $T: K \to 2^{\mathbb{R}^n}$ 是具有非空紧凸值的连续集值映射. 如果假定 (4.3) 成立, 那么算法 4.1 或者在有限步迭代后停止或者产生一个收敛于变分不等式问题 (4.1) 解的无穷序列 $\{x_i\}$.

证明 对任意选取的变分不等式的解 x^*, 根据引理 4.4, 有

$$x^* \in C_i, \quad \forall i$$

如果算法 4.1 不在有限步迭代后停止, 那么它会产生一个无穷序列 $\{x_i\}$. 因此, 我们必然有

$$r_\mu(x_i,\xi_i) \neq 0, \quad \forall i$$

根据算法 4.1 的步骤 3, $x_{i+1} := \mathcal{P}_{C_i}(x_i)$, 根据引理 1.2, 有

$$\begin{aligned}
\|x_{i+1} - x^*\|^2 &\leqslant \|x_i - x^*\|^2 - \|x_{i+1} - x_i\|^2 \\
&\leqslant \|x_i - x^*\|^2 - \operatorname{dist}^2(x_i, C_i)
\end{aligned} \tag{4.9}$$

其中, 最后一个不等式成立是因为 $x_{i+1} \in C_i$. 由此可以推出, 序列 $\{\|x_i - x^*\|^2\}$ 单调递减, 因此是一个收敛序列. 我们立即得到,$\{x_i\}$ 是一个有界序列以及

$$\lim_{i\to\infty} \operatorname{dist}(x_i, C_i) = 0 \tag{4.10}$$

由于序列 $\{x_i\}$ 是有界的, 故存在收敛的子序列 $\{x_{i_j}\}$, 设其极限为 $\bar{x}$.

如果 $\overline{x}$ 是变分不等式问题 (4.1) 的解, 接下来我们证明序列 $\{x_i\}$ 收敛于 $\overline{x}$. 在式 (4.9) 中用 $\overline{x}$ 代替 x^*, 得到序列 $\{\|x_i-\overline{x}\|\}$ 单调递减从而收敛. 由于 $\overline{x}$ 是 $\{x_i\}$ 的一个聚点, 所以 $\{\|x_i-\overline{x}\|\}$ 的某个子序列收敛到零, 从而序列 $\{\|x_i-\overline{x}\|\}$ 收敛到零, 因此 $\lim\limits_{i\to\infty} x_i=\overline{x}$.

现在假设 $\overline{x}$ 不是变分不等式问题 (4.1) 的解, 接下来首先证明算法 4.1 中的 k_i 不可能趋近于 ∞. 因为 T 是具有紧值的连续映射, 根据引理 1.26,$\{T(x_i):i\in N\}$ 是一个有界集, 根据 ξ_i 的定义,$\{\xi_i\}$ 是有界序列, 存在 $\{\xi_i\}$ 的一个聚点 $\overline{\xi}$, 那么存在一个子序列 $\{\xi_{i_j}\}$ 收敛到 $\overline{\xi}$. 因为 T 是具有紧值的上半连续映射, 根据引理 1.27,T 是闭的, 由此 $\overline{\xi}\in T(\overline{x})$. 根据 k_i 的定义, 有

$$\langle \xi_i-u_i, r_\mu(x_i,\xi_i)\rangle > \sigma\|r_\mu(x_i,\xi_i)\|^2,\quad \forall u_i=\mathcal{P}_{T(x_i-\gamma^{k_i-1}r_\mu(x_i,\xi_i))}(\xi_i) \tag{4.11}$$

如果 $k_{i_j}\to\infty$, 那么

$$x_{i_j}-\gamma^{k_{i_j}-1}r_\mu(x_{i_j},\xi_{i_j})\to\overline{x}$$

根据 T 的下半连续性, 存在 $\overline{\xi}_{i_j}\in T(x_{i_j}-\gamma^{k_{i_j}-1}r_\mu(x_{i_j},\xi_{i_j}))$ 使得 $\overline{\xi}_{i_j}$ 收敛到 $\overline{\xi}$.

由于 $u_{i_j}=\mathcal{P}_{T(x_{i_j}-\gamma^{k_{i_j}-1}r_\mu(x_{i_j},\xi_{i_j}))}(\xi_{i_j})$, 所以

$$u_{i_j}\in T(x_{i_j}-\gamma^{k_{i_j}-1}r_\mu(x_{i_j},\xi_{i_j})),\quad \|u_{i_j}-\xi_{i_j}\|\leqslant\|\overline{\xi}_{i_j}-\xi_{i_j}\|$$

所以 $\lim\limits_{j\to\infty}u_{i_j}=\overline{\xi}$ 以及

$$\langle \xi_{i_j}-u_{i_j}, r_\mu(x_{i_j},\xi_{i_j})\rangle > \sigma\|r_\mu(x_{i_j},\xi_{i_j})\|^2 \tag{4.12}$$

令 $j\to\infty$, 根据 $r_\mu(\cdot,\cdot)$ 的连续性, 我们得到

$$0\geqslant\sigma\|r_\mu(\overline{x},\overline{\xi})\|^2>0$$

矛盾. 所以 $\{k_i\}$ 是有界的, 根据 η_i 的定义,$\{\eta_i\}$ 是有界的. 根据

$$\begin{aligned}\|h_i(x)-h_i(y)\| &= \|\langle y_i+\eta_i r_\mu(x_i,\xi_i), x-y\rangle\|\\ &\leqslant(\|y_i\|+\|\eta_i r_\mu(x_i,\xi_i)\|)\|x-y\|\end{aligned}$$

由于序列 $\{x_i\}$ 和 $\{\xi_i\}$ 是有界的, 所以序列 $\{r_\mu(x_i,\xi_i)\}$ 和序列 $\{T(x_i-\eta_i r_\mu(x_i,\xi_i))\}$ 是有界的. 因此, 存在 $M>0$ 使得

$$\|y_i\|+\|\eta_i r_\mu(x_i,\xi_i)\|\leqslant\sup_{\zeta\in T(x_i-\eta_i r_\mu(x_i,\xi_i))}\|\zeta\|+\|\eta_i r_\mu(x_i,\xi_i)\|\leqslant M,\quad\forall i$$

所以, 每个 h_i 在 K 上是 Lipschitz 连续的,Lipschitz 常数为 M. 注意到 $x_i \notin C_i$, 根据引理 1.25, 有

$$\operatorname{dist}(x_i, C_i) \geqslant M^{-1} h_i(x_i), \quad \forall i \tag{4.13}$$

根据式 (4.13) 和引理 4.4, 我们得到

$$\begin{aligned}\operatorname{dist}(x_i, C_i) &\geqslant M^{-1} h_i(x_i) \\ &\geqslant M^{-1}(\mu^{-1} - \sigma)\eta_i \|r_\mu(x_i, \xi_i)\|^2\end{aligned} \tag{4.14}$$

根据式 (4.10) 和式 (4.14), 有

$$\lim_{i\to\infty} \eta_i \|r_\mu(x_i, \xi_i)\|^2 = 0$$

根据 $\{\eta_i\}$ 的有界性, 我们得到 $\lim\limits_{i\to\infty} \|r_\mu(x_i, \xi_i)\| = 0$. 因为序列 $\{x_i\}$ 和序列 $\{\xi_i\}$ 是有界的, 存在 $\{(x_i, \xi_i)\}$ 的一个聚点 $(\overline{x}, \overline{\xi})$. 因为 $r_\mu(\cdot, \cdot)$ 是连续映射, 所以 $r_\mu(\overline{x}, \overline{\xi}) = 0$, 即 $\overline{x}$ 是变分不等式问题 (4.1) 的解. 类似于此定理前半部分的证明, 我们有 $\lim\limits_{i\to\infty} x_i = \overline{x}$.

4.2　二次投影算法

下面介绍二次投影算法，其本质是在每次迭代过程中只需要两次投影步骤。

4.2.1　主要结果

算法 4.2　选取 $x_0 \in K$ 和参变量 $\sigma > 0, \mu \in (0, 1/\sigma), \gamma \in (0, 1)$. 令 $i = 0$.

步骤 1. 若存在 $\xi \in T(x_i)$ 使得 $r_\mu(x_i, \xi) = 0$, 停止; 否则, 任意选取 $\xi_i \in T(x_i)$.

步骤 2. 设 k_i 是满足下面不等式的最小的非负整数:

$$\inf_{y \in T(x_i - \gamma^{k_i} r_\mu(x_i, \xi_i))} \langle \xi_i - y, r_\mu(x_i, \xi_i) \rangle \leqslant \sigma \|r_\mu(x_i, \xi_i)\|^2 \tag{4.15}$$

令 $\eta_i = \gamma^{k_i}$ 和 $z_i = x_i - \eta_i r_\mu(x_i, \xi_i)$.

步骤 3. 计算 $x_{i+1} := \mathcal{P}_{C_i}(x_i)$, 其中

$$\begin{aligned} C_i &:= \{x \in K : h_i(x) \leqslant 0\} \\ h_i(x) &:= \sup_{\xi \in T(z_i)} \langle \xi, x - z_i \rangle \end{aligned} \tag{4.16}$$

令 $i := i + 1$ 并回到步骤 1.

下面的引理说明算法 4.2 是可行的.

引理 4.6 若 x_i 不是变分不等式问题 (4.1) 的解, 则存在非负整数 k_i 满足式 (4.15).

证明 用反证法. 假设对所有的非负整数 k 和 $y \in T(x_i - \gamma^k r_\mu(x_i, \xi_i))$ 有

$$\langle \xi_i - y, r_\mu(x_i, \xi_i) \rangle > \sigma \|r_\mu(x_i, \xi_i)\|^2$$

由于 T 是下半连续的, $\xi_i \in T(x_i)$, $\lim\limits_{k\to\infty}(x_i - \gamma^k r_\mu(x_i, \xi_i)) = x_i$, 所以存在序列 $y_k \in T(x_i - \gamma^k r_\mu(x_i, \xi_i))$ 使得 $\lim\limits_{k\to\infty} y_k = \xi_i$. 我们得到

$$\langle \xi_i - y_k, r_\mu(x_i, \xi_i) \rangle > \sigma \|r_\mu(x_i, \xi_i)\|^2, \quad \forall k$$

由此

$$\|\xi_i - y_k\| > \sigma \|r_\mu(x_i, \xi_i)\|, \quad \forall k$$

令 $k \to \infty$, 有

$$0 = \|\xi_i - \xi_i\| \geqslant \sigma \|r_\mu(x_i, \xi_i)\| > 0$$

矛盾.

经过简单推导容易得到下面的结论.

引理 4.7 式 (4.16) 所定义的函数 h_i 在 $\mathbb{R}^n$ 上是 Lipschitz 连续的.

引理 4.8 假设 x^* 是变分不等式问题 (4.1) 的解, 函数 h_i 由式 (4.16) 所定义. 那么

$$h_i(x_i) \geqslant \eta_i(\mu^{-1} - \sigma)\|r_\mu(x_i, \xi_i)\|^2$$

$$h_i(x^*) \leqslant 0$$

特别地, 如果 $r_\mu(x_i, \xi_i) \neq 0$, 那么 $h_i(x_i) > 0$.

证明 由于 $z_i = x_i - \eta_i r_\mu(x_i, \xi_i)$, 所以

$$\begin{aligned} h_i(x_i) &= \sup_{\xi \in T(z_i)} \langle \xi, x_i - z_i \rangle \\ &= \eta_i \sup_{\xi \in T(z_i)} \langle \xi, r_\mu(x_i, \xi_i) \rangle \\ &\geqslant \eta_i \langle \xi_i, r_\mu(x_i, \xi_i) \rangle - \sigma \eta_i \|r_\mu(x_i, \xi_i)\|^2 \\ &\geqslant \eta_i(\mu^{-1} - \sigma)\|r_\mu(x_i, \xi_i)\|^2 \end{aligned}$$

其中, 第一个不等式成立是根据式 (4.15), 第二个不等式成立是根据引理 4.2. 由于 T 满足假定 (4.3), 所以 $h_i(x^*) \leqslant 0$.

下面给出算法 4.2 的收敛性结果。

定理 4.9 假设 $T: K \to 2^{\mathbb{R}^n}$ 是具有非空紧凸值的连续集值映射. 如果假定 (4.3) 成立, 那么算法 4.2 或者在有限步迭代后停止, 或者产生一个收敛于变分不等式问题 (4.1) 解的无穷序列 $\{x_i\}$.

证明 对任意选取的变分不等式的解 x^*, 根据引理 4.8, 有

$$x^* \in C_i, \quad \forall i$$

如果算法 4.2 不在有限步迭代后停止, 那么它会产生一个无穷序列 $\{x_i\}$. 因此, 我们必然有

$$r_\mu(x_i, \xi_i) \neq 0, \quad \forall i$$

根据算法 4.2 的步骤 3, $x_{i+1} := \mathcal{P}_{C_i}(x_i)$, 根据引理 4.8, 我们有

$$\begin{aligned} \|x_{i+1} - x^*\|^2 &\leqslant \|x_i - x^*\|^2 - \|x_{i+1} - x_i\|^2 \\ &\leqslant \|x_i - x^*\|^2 - \operatorname{dist}^2(x_i, C_i) \end{aligned} \tag{4.17}$$

其中, 最后一个不等式成立是因为 $x_{i+1} \in C_i$. 由此可以推出, 序列 $\{\|x_i - x^*\|^2\}$ 单调递减, 因此是一个收敛序列. 我们立即得到,$\{x_i\}$ 是一个有界序列以及

$$\lim_{i\to\infty} \operatorname{dist}(x_i, C_i) = 0 \tag{4.18}$$

由于序列 $\{x_i\}$ 是有界的, 故存在收敛的子序列 $\{x_{i_j}\}$, 设其极限为 $\overline{x}$.

如果 $\overline{x}$ 是变分不等式问题 (4.1) 的解, 接下来我们证明序列 $\{x_i\}$ 收敛于 $\overline{x}$. 在式 (4.17) 中用 $\overline{x}$ 代替 x^*, 得到序列 $\{\|x_i - \overline{x}\|\}$ 单调递减从而收敛. 由于 $\overline{x}$ 是 $\{x_i\}$ 的一个聚点, 所以 $\{\|x_i - \overline{x}\|\}$ 的某个子序列收敛到零, 从而序列 $\{\|x_i - \overline{x}\|\}$ 收敛到零, 因此 $\lim\limits_{i\to\infty} x_i = \overline{x}$.

现在假设 $\overline{x}$ 不是变分不等式问题 (4.1) 的解, 接下来首先证明算法 4.2 中的 k_i 不可能趋近于 ∞. 因为 T 是具有紧值的连续映射, 根据引理 1.26,$\{T(x_i): i \in N\}$ 是一个有界集, 根据 ξ_i 的定义,$\{\xi_i\}$ 是有界序列, 存在 $\{\xi_i\}$ 的一个聚点 $\overline{\xi}$, 那么存在一个子序列 $\{\xi_{i_j}\}$ 收敛到 $\overline{\xi}$. 因为 T 是具有紧值的上半连续映射, 根据引理 1.27,T 是闭的, 由此 $\overline{\xi} \in T(\overline{x})$. 根据 k_i 的定义, 有

$$\sigma\|r_\mu(x_{i_j}, \xi_{i_j})\|^2 < \inf_{y \in T(x_{i_j} - \gamma^{k_{i_j}-1} r_\mu(x_{i_j}, \xi_{i_j}))} \langle \xi_{i_j} - y, r_\mu(x_{i_j}, \xi_{i_j})\rangle, \quad \forall j$$

由于 T 和 $r_\mu(\cdot,\cdot)$ 是连续的, 根据引理 1.28, 有

$$\sigma\|r_\mu(\overline{x}, \overline{\xi})\|^2 \leqslant \inf_{y \in T(\overline{x})} \langle \overline{\xi} - y, r_\mu(\overline{x}, \overline{\xi})\rangle$$

由于 $\bar{\xi} \in T(\bar{x})$, 所以

$$\begin{aligned}0 < \sigma \|r_\mu(\bar{x},\bar{\xi})\|^2 &\leqslant \inf_{y \in T(\bar{x})} \langle \bar{\xi} - y, r_\mu(\bar{x},\bar{\xi})\rangle \\ &\leqslant \langle \bar{\xi} - \bar{\xi}, r_\mu(\bar{x},\bar{\xi})\rangle = 0\end{aligned}$$

矛盾. 所以 $\{k_i\}$ 是有界的, 根据 η_i 的定义,$\{\eta_i\}$ 是有界的. 由于序列 $\{x_i\}$ 和 $\{\xi_i\}$ 是有界的, 所以序列 $\{r_\mu(x_i,\xi_i)\}$ 和序列 $\{T(z_i)\}$ 是有界的. 因此, 存在 $M > 0$ 使得

$$\sup_{\zeta \in T(z_i)} \|\zeta\| \leqslant M, \quad \forall i$$

根据引理 4.7, 每个 h_i 在 K 上是 Lipschitz 连续的,Lipschitz 常数为 M. 注意到 $x_i \notin C_i$, 根据引理 1.25, 有

$$\mathrm{dist}(x_i, C_i) \geqslant M^{-1} h_i(x_i), \quad \forall i \tag{4.19}$$

根据式 (4.19) 和引理 4.8, 我们得到

$$\begin{aligned}\mathrm{dist}(x_i, C_i) &\geqslant M^{-1} h_i(x_i) \\ &\geqslant M^{-1}(\mu^{-1} - \sigma)\eta_i \|r_\mu(x_i,\xi_i)\|^2\end{aligned} \tag{4.20}$$

根据式 (4.18) 和式 (4.20), 有

$$\lim_{i\to\infty} \eta_i \|r_\mu(x_i,\xi_i)\|^2 = 0$$

根据$\{\eta_i\}$的有界性, 我们得到$\lim\limits_{i\to\infty} \|r_\mu(x_i,\xi_i)\| = 0$. 因为序列$\{x_i\}$和序列 $\{\xi_i\}$ 是有界的, 存在 $\{(x_i,\xi_i)\}$ 的一个聚点 $(\bar{x},\bar{\xi})$. 因为$r_\mu(\cdot,\cdot)$ 是连续映射, 所以$r_\mu(\bar{x},\bar{\xi}) = 0$, 即$\bar{x}$是变分不等式问题 (4.1) 的解. 类似于此定理前半部分的证明, 我们有$\lim\limits_{i\to\infty} x_i = \bar{x}$.

下面我们给出关于算法 4.2 所产生迭代序列收敛率的一个结果, 该结果的建立需要某种局部误差界的性质 (见式 (4.21)).

任给参量 $\delta > 0$, 定义

$$P(\delta) := \{(x,\xi) \in K \times \mathbb{R}^n : \xi \in T(x), \|r_\mu(x,\xi)\| \leqslant \delta\}$$

称 T 在 K 上是 Lipschitz 连续的, 如果存在常数 $L > 0$ 使得

$$D(T(x), T(y)) \leqslant L\|x - y\|$$

其中, D 表示 Hausdorff 度量.

定理 4.10 假设 T 满足定理 4.9 的假定条件且是 Lipschitz 连续的, 其 Lipschitz 常数为 L. 如果存在常数 $c>0$ 和 $\delta>0$ 使得

$$\operatorname{dist}(x,S)\leqslant c\|r_\mu(x,\xi)\|,\quad \forall(x,\xi)\in P(\delta) \tag{4.21}$$

那么存在常数 $\alpha>0$ 使得对充分大的 i 有

$$\operatorname{dist}(x_i,S)\leqslant\frac{1}{\sqrt{\alpha i+\operatorname{dist}^{-2}(x_0,S)}}$$

证明 令 $\eta:=\min\{1/2,L^{-1}\gamma\sigma\}$. 我们首先证明 $\eta_i>\eta,\forall i$. 根据 η_i 的定义,$\eta_i\in(0,1]$. 如果 $\eta_i=1$, 那么显然 $\eta_i>1/2\geqslant\eta$. 现在假定 $\eta_i<1$. 由于 $\eta_i=\gamma^{k_i}$, 所以 $k_i\geqslant 1$. 因此, 根据 k_i 的定义, 有

$$\langle\xi_i-y,r_\mu(x_i,\xi_i)\rangle>\sigma\|r_\mu(x_i,\xi_i)\|^2,\quad\forall y\in T(x_i-\gamma^{k_i-1}r_\mu(x_i,\xi_i))$$

因为 $k_i\geqslant 1$, 所以

$$\|y-\xi_i\|>\sigma\|r_\mu(x_i,\xi_i)\|,\quad\forall y\in T(x_i-\gamma^{-1}\eta_i r_\mu(x_i,\xi_i))$$

由于 $\xi_i\in T(x_i)$, T 是紧值的, 所以由 Hausdorff 度量的定义, 存在 $\zeta_i\in T(x_i-\gamma^{-1}\eta_i r_\mu(x_i,\xi_i))$ 使得

$$\begin{aligned}\sigma\|r_\mu(x_i,\xi_i)\|&<\|\zeta_i-\xi_i\|\\&\leqslant H(T(x_i-\gamma^{-1}\eta_i r_\mu(x_i,\xi_i)),T(x_i))\\&\leqslant L\gamma^{-1}\eta_i\|r_\mu(x_i,\xi_i)\|\end{aligned}$$

所以 $\eta_i>L^{-1}\gamma\sigma\geqslant\eta$. 令 $x^*\in\mathcal{P}_S(x_i)$, 根据定理 4.9 和式 (4.15), 对充分大的 i, 有

$$\begin{aligned}\operatorname{dist}^2(x_{i+1},S)&\leqslant\|x_{i+1}-x^*\|^2\\&\leqslant\|x_i-x^*\|^2-M^{-2}(\mu^{-1}-\sigma)^2{\eta_i}^2\|r_\mu(x_i,\xi_i)\|^4\\&\leqslant\|x_i-x^*\|^2-M^{-2}(\mu^{-1}-\sigma)^2\eta^2\|r_\mu(x_i,\xi_i)\|^4\\&\leqslant\operatorname{dist}^2(x_i,S)-M^{-2}(\mu^{-1}-\sigma)^2\eta^2c^{-4}\operatorname{dist}^4(x_i,S)\end{aligned}$$

记 $\alpha:=M^{-2}(\mu^{-1}-\sigma)^2\eta^2c^{-4}$, 根据引理 1.31, 得到

$$\begin{aligned}\operatorname{dist}(x_i,S)&\leqslant\operatorname{dist}(x_0,S)/\sqrt{\alpha i\operatorname{dist}^2(x_0,S)+1}\\&=1/\sqrt{\alpha i+\operatorname{dist}^{-2}(x_0,S)}\end{aligned}$$

证毕.

4.2.2 统一框架

接下来我们研究投影算法的统一框架.

在广义变分不等式的投影算法中, 严格分离当前迭代点 x_i 和解集合 S 的超平面决定了算法产生序列的收敛速度, 而超平面完全由它的法向量 d_i 和距离参数 ω_i 决定, 即

$$H_i := \{x \in \mathbb{R}^n : \langle d_i, x_i - x\rangle = \omega_i\} \tag{4.22}$$

现在, 我们给出广义变分不等式投影算法的框架.

算法 4.3 选取 $x_0 \in K$ 和参变量 $\sigma > 0, 0 < \mu < \min\{1, 1/\sigma\}$,$\gamma \in (0,1)$. 令 $i = 0$.

步骤 1. 若存在 $\xi \in T(x_i)$ 使得 $r_\mu(x_i, \xi) = 0$, 停止; 否则, 任意选取 $\xi_i \in T(x_i)$.

步骤 2. 设 k_i 是满足下面不等式的最小的非负整数:

$$\langle \xi_i - y_i, r_\mu(x_i, \xi_i)\rangle \leqslant \sigma \|r_\mu(x_i, \xi_i)\|^2 \tag{4.23}$$

其中, $y_i = \mathcal{P}_{T(x_i - \gamma^{k_i} r_\mu(x_i, \xi_i))}(\xi_i)$. 令 $\eta_i = \gamma^{k_i}$.

步骤 3. 计算 $x_{i+1} := \mathcal{P}_{C_i}(x_i)$, 其中

$$C_i := \{x \in K : h_i(x) \leqslant 0\}$$

$$h_i(x) := \langle d_i, x - x_i\rangle + \omega_i \tag{4.24}$$

令 $i := i + 1$ 并回到步骤 1.

注解 4.2 算法 4.3 中的 Armijo 线性搜索程序可以用下面的不等式来代替:

$$\langle y_i, r_\mu(x_i, \xi_i)\rangle \geqslant \sigma \|r_\mu(x_i, \xi_i)\|^2 \tag{4.25}$$

而且, 正参量 σ 和 μ 的值会因 Armijo 线性搜索程序 (4.23) 或超平面 (4.24) 的不同选择而改变 (如见算法 4.4 中的 μ).

注解 4.3 引理 4.3 说明算法 4.3 是可行的.

接下来我们给出算法 4.3 的收敛性结果.

定理 4.11 设 $T : K \to 2^{\mathbb{R}^n}$ 是具有非空紧凸值的连续映射, 如果算法 4.3 所产生的序列满足

$$\theta(\sigma, \mu)\eta_i \|r_\mu(x_i, \xi_i)\|^2 \leqslant \omega_i \leqslant \langle d_i, x_i - x^*\rangle, \quad \forall x^* \in S \tag{4.26}$$

而且, 如果存在参量 $M>0$ 使得

$$\|d_i\| \leqslant M \tag{4.27}$$

其中, $\theta(\sigma,\mu)$ 是依赖于 σ 和 μ 的正参量, 那么算法 4.3 或者在有限步迭代后停止, 或者产生一个收敛于变分不等式问题 (4.1) 解 $\overline{x}$ 的无穷序列 $\{x_i\}$.

证明　只需证明 $h_i(x)$ 是 Lipschitz 连续的且严格分离当前迭代点 x_i 和变分不等式问题 (4.1) 的解集合 S, 剩下的证明类似于定理 4.9. 由式 (4.26) 有

$$h_i(x_i)=\omega_i \geqslant \theta(\sigma,\mu)\eta_i\|r_\mu(x_i,\xi_i)\|^2 \geqslant 0$$

$$h_i(x^*)=\langle d_i, x^*-x_i\rangle+\omega_i \leqslant 0, \quad \forall x^* \in S$$

特别地, 如果 $r_\mu(x_i,\xi_i)\neq 0$, 那么 $h_i(x_i)>0$. 由式 (4.27) 有

$$\begin{aligned}|h_i(x)-h_i(y)| &= |\langle d_i, x-y\rangle| \\ &\leqslant \|d_i\|\|x-y\| \\ &\leqslant M\|x-y\|, \quad \forall x,y \in K\end{aligned}$$

注解 4.4　如果选择 Armijo 线性搜索程序 (4.25), 那么定理 4.11 的结论仍然成立.

如果在算法 4.3 中, Armijo 线性搜索程序选择式 (4.25), 并令 $d_i=y_i, \omega_i=\eta_i\langle y_i, r_\mu(x_i,\xi_i)\rangle$, 我们得到求解变分不等式问题 (4.1) 的如下算法.

算法 4.4　选取 $x_0\in K$ 和参变量 $\sigma>0, 0<\mu<\min\{1,1/\sigma\}$,$\gamma\in(0,1)$. 令 $i=0$.

步骤 1. 若存在 $\xi\in T(x_i)$ 使得 $r_\mu(x_i,\xi)=0$, 停止; 否则, 任意选取 $\xi_i\in T(x_i)$.

步骤 2. 设 k_i 是满足下面不等式的最小的非负整数 k:

$$\langle y_k, r_\mu(x_i,\xi_i)\rangle \geqslant \sigma\|r_\mu(x_i,\xi_i)\|^2 \tag{4.28}$$

其中, $y_i=\mathcal{P}_{T(x_i-\gamma^{k_i}r_\mu(x_i,\xi_i))}(\xi_i)$. 令 $\eta_i=\gamma^{k_i}$ 和 $z_i=x_i-\eta_i r_\mu(x_i,\xi_i)$.

步骤 3. 计算 $x_{i+1}:=\mathcal{P}_{C_i}(x_i)$, 其中

$$C_i:=\{x\in K: h_i(x)\leqslant 0\}$$

$$h_i(x):=\langle y_i, x-z_i\rangle \tag{4.29}$$

令 $i:=i+1$ 并回到步骤 1.

定理 4.12 假设 $T: K \to 2^{\mathbb{R}^n}$ 是具有非空紧凸值的连续集值映射. 如果假定 (4.3) 成立, 那么算法 4.4 或者在有限步迭代后停止, 或者产生一个收敛于变分不等式问题 (4.1) 解的无穷序列 $\{x_i\}$.

证明 根据定理 4.11, 我们只需证明 $h_i(x)$ 是 Lipschitz 连续的且严格分离当前迭代点 x_i 和变分不等式问题 (4.1) 的解集合 S. 由式 (4.29) 有

$$\begin{aligned}\|h_i(x) - h_i(y)\| &= \|\langle y_i, x-y\rangle\| \\ &\leqslant \|y_i\|\|x-y\|\end{aligned}$$

由于 $T(x)$ 是具有紧值的连续映射, 根据引理 1.26, 集合 $\{T(x_i) : i \in N\}$ 是有界的, 所以序列 $\{\xi_i\}$ 和 $\{x_i - \eta_i r_\mu(x_i, \xi_i)\}$ 是有界的. 根据 T 的连续性可知, 集合 $T(x_i - \eta_i r_\mu(x_i, \xi_i))$ 是有界的, 所以存在 $M > 0$ 使得

$$\|y_i\| \leqslant \sup_{\zeta \in T(x_i - \eta_i r_\mu(x_i, \xi_i))} \|\zeta\| \leqslant M$$

因此, 每个 h_i 均是 Lipschitz 连续的, 同时, 由式 (4.28) 有

$$\begin{aligned}h_i(x_i) &= \langle y_i, x_i - z_i\rangle \\ &= \eta_i\langle y_i, r_\mu(x_i, \xi_i)\rangle \\ &\geqslant \sigma\eta_i\|r_\mu(x_i, \xi_i)\|^2 \geqslant 0\end{aligned}$$

如果 $r_\mu(x_i, \xi_i) \neq 0$, 那么 $h_i(x_i) > 0$. 由于 $y_i \in T(z_i)$, 所以由假定 (4.3) 知 $h_i(x^*) < 0$.

注解 4.5 如果在算法 4.4 中令 $d_i = y_i + \eta_i r_\mu(x_i, \xi_i), \omega_i = \eta_i\langle y_i - \mu\xi_i + r_\mu(x_i, \xi_i), r_\mu(x_i, \xi_i)\rangle$, 则算法 4.4 就变为算法 4.1.

4.3 修正超梯度算法

在前述超梯度算法 4.1 和二次投影算法 4.2 中, 将当前迭代点到超平面上的投影作为下一步迭代点, 在本节介绍的修正超梯度算法 4.5 中, 下一步迭代是通过初始点到两超平面交上的投影产生.

算法 4.5 选取 $x_0 \in K$ 和参变量 $\sigma > 0, \mu \in (0, 1/\sigma), \gamma \in (0,1)$. 令 $i = 0$.

步骤 1. 若存在 $\xi \in T(x_i)$ 使得 $r_\mu(x_i, \xi) = 0$, 停止; 否则, 任意选取 $\xi_i \in T(x_i)$.

步骤 2. 对每个正整数 k, 令 $y_k := \mathcal{P}_{T(x_i - \gamma^k r_\mu(x_i, \xi_i))}(\xi_i)$.

步骤 3. 设 k_i 是满足下面不等式的最小的非负整数 k:

$$\langle y_k, r_\mu(x_i, \xi_i)\rangle \geqslant \sigma\|r_\mu(x_i, \xi_i)\|^2 \tag{4.30}$$

令 $z_i = x_i - \eta_i r_\mu(x_i, \xi_i)$, 其中 $\eta_i = \gamma^{k_i}$.

步骤 4. 计算 $x_{i+1} := \mathcal{P}_{H_i^1 \cap H_i^2 \cap K}(x_0)$, 其中

$$H_i^1 := \{x \in R^n : \langle y_{k_i}, x - z_i \rangle \leqslant 0\}$$

$$H_i^2 := \{x \in R^n : \langle x - x_i, x_0 - x_i \rangle \leqslant 0\}$$

令 $i := i + 1$ 并回到步骤 1.

引理 4.13　算法 4.5 步骤 2 所产生的序列 $\{y_k\}$ 具有下面的性质:

$$y_k \in T(x_i - \gamma^k r_\mu(x_i, \xi_i)), \quad \lim_{k\to\infty} y_k = \xi_i$$

注解 4.6　根据引理 4.2, 由

$$\langle \xi_i - y_k, r_\mu(x_i, \xi_i) \rangle \leqslant (\mu^{-1} - \sigma)\|r_\mu(x_i, \xi_i)\|^2 \tag{4.31}$$

可以推出式 (4.30), 所以式 (4.31) 可以用式 (4.30) 替代.

注解 4.7　如果 $r_\mu(x_i, \xi_i) \neq 0$, 那么存在满足式 (4.30) 的 i. 事实上, 根据引理 4.13, 有

$$\lim_{k\to\infty} y_k = \xi_i$$

所以

$$\begin{aligned}\lim_{k\to\infty} \langle y_k, r_\mu(x_i, \xi_i) \rangle &= \langle \xi_i, r_\mu(x_i, \xi_i) \rangle \\ &\geqslant \mu^{-1}\|r_\mu(x_i, \xi_i)\|^2 \\ &> \sigma\|r_\mu(x_i, \xi_i)\|^2\end{aligned}$$

其中, 第一个不等式成立是根据引理 4.2, 第二个不等式成立是根据 $\mu^{-1} > \sigma$ 和 $r_\mu(x_i, \xi_i) \neq 0$.

引理 4.14　如果 $r_\mu(x_i, \xi_i)) \neq 0$, 那么超平面

$$\partial H_i^1 = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle y_{k_i}, x - z_i \rangle = 0\}$$

严格分离当前迭代点 x_i 和解集合 S.

证明　令 $h_i(x) := \langle y_{k_i}, x - z_i \rangle$, 则 $\partial H_i^1 = \{x \in \mathbb{R}^n : h_i(x) = 0\}$. 由于 $z_i = x_i - \eta_i r_\mu(x_i, \xi_i)$, 所以

$$\begin{aligned}h_i(x_i) &= \langle y_{k_i}, x_i - z_i \rangle \\ &= \eta_i \langle y_{k_i}, r_\mu(x_i, \xi_i) \rangle \\ &\geqslant \sigma\eta_i\|r_\mu(x_i, \xi_i)\|^2 > 0\end{aligned}$$

其中, 第一个不等式成立是根据式 (4.30), 第二个不等式成立是根据 $r_\mu(x_i,\xi_i))\neq 0$. 由于 T 满足假定 (4.3), 所以

$$h_i(x^*)\leqslant 0,\quad \forall x^*\in S$$

引理 4.15 如果 $S\neq\varnothing$, 那么 $S\subset H_i^1\cap H_i^2\cap K$.

证明 由引理 4.14 可得 $S\subset H_i^1\cap K$. 接下来我们只需证明 $S\subset H_i^2,\forall i\geqslant 0$. 用数学归纳法, 易见 $S\subset H_0^2=\mathbb{R}^n$. 假设

$$S\subset H_i^2,\quad \forall i=l\geqslant 0$$

那么

$$S\subset H_l^1\cap H_l^2\cap K$$

对任意 $x^*\in S$, 根据引理 1.1 和

$$x_{l+1}=\mathcal{P}_{H_l^1\cap H_l^2\cap K}(x_0)$$

有

$$\langle x^*-x_{l+1},x_0-x_{l+1}\rangle\leqslant 0$$

所以 $x^*\in H_{l+1}^2$, 因此 $S\subset H_{l+1}^2$. 证毕.

引理 4.16 假设 $K\subset\mathbb{R}^n$ 是非空有界闭凸集,$T:K\to 2^{\mathbb{R}^n}$ 是具有非空闭凸值的下半连续集值映射, 那么变分不等式问题 (4.1) 的解集 $\mathrm{MVIP}(T,K)\neq\varnothing$.

证明 由于 T 是具有非空闭凸值的下半连续集值映射, 根据 Michael 选择定理 (引理 1.29),T 允许一个连续选择, 即存在连续映射 $G:K\to\mathbb{R}^n$ 使得

$$G(x)\in T(x),\quad \forall x\in K$$

由于 K 是非空有界闭凸集, 根据引理 1.30, 所以如下变分不等式问题 (简记为 VI) 有一个解: 找 $x\in K$ 使得

$$\langle G(x),y-x\rangle\geqslant 0,\quad \forall y\in K$$

即变分不等式问题 VI 的解集合 $S'\neq\varnothing$, 由 $S'\subset\mathrm{MVIP}(T,K)$ 知 $\mathrm{MVIP}(T,K)\neq\varnothing$.

引理 4.17 设 $T:K\to 2^{\mathbb{R}^n}$ 是具有非空紧凸值的连续映射, 假设 $\mathrm{MVIP}(T,K)=\varnothing$, 则

$$H_i^1\cap H_i^2\cap K\neq\varnothing,\quad \forall i$$

证明 用反证法. 假设存在 $i_0 \geqslant 0$ 使得 $H_{i_0}^1 \cap H_{i_0}^2 \cap K = \varnothing$, 那么存在正数 M 使得

$$\{x_i : 0 \leqslant i \leqslant i_0\} \subseteq B(x_0, M)$$

其中

$$B(x_0, M) := \{x \in R^n : \|x - x_0\| \leqslant M\}$$

由于 $T(x)$ 是具有紧值的连续映射, 根据引理 1.26,$\{T(x_i) : 0 \leqslant i \leqslant i_0\}$ 是有界集, 所以 $\{x_i - \mu\xi_i : \xi_i \in T(x_i), 0 \leqslant i \leqslant i_0\}$ 是有界的. 不失一般性, 假设

$$\{x_i - \mu\xi_i : \xi_i \in T(x_i), 0 \leqslant i \leqslant i_0\} \subseteq B(x_0, M)$$

考虑集值变分不等式问题 MVIP(T, C), 其中

$$C = K \cap B(x_0, 2M)$$

根据引理 4.16, 此时变分不等式问题 (4.1) 的解集合 (用 S'' 表示)$S'' \neq \varnothing$. 当算法 4.5 运用到求解变分不等式问题 (4.1)(初始点为 x_0) 时, 为避免混淆, 相应的序列 $\{H_i^1\}, \{H_i^2\}$ 和 $\{x_i\}$ 分别用 $\{\overline{H}_i^1\}, \{\overline{H}_i^2\}$ 和 $\{\overline{x}_i\}$ 代替. 我们断言:

(i) 集合 $\{\overline{x}_i\}$ 至少有 $i_0 + 1$ 个元素;

(ii) $x_i = \overline{x}_i, H_i^1 = \overline{H}_i^1, H_i^2 = \overline{H}_i^2, \forall 0 \leqslant i \leqslant i_0$;

(iii) x_{i_0} 不是 GVI(T, C) 的解.

结论 (i) 和结论 (iii) 是显然的, 接下来我们证明 (ii). 只需证明

$$\mathcal{P}_C(x_i - \mu\xi_i) = \mathcal{P}_K(x_i - \mu\xi_i)$$

其中, $\xi_i \in T(x_i), 0 \leqslant i \leqslant i_0$. 由于

$$\begin{aligned}\|x_0 - \mathcal{P}_K(x_i - \mu\xi_i)\| &\leqslant \|x_0 - \mathcal{P}_K(x_0)\| + \|\mathcal{P}_K(x_0) - \mathcal{P}_K(x_i - \mu\xi_i)\| \\ &\leqslant \|x_0 - x_{i_0}\| + \|x_0 - (x_i - \mu\xi_i)\| \leqslant 2M\end{aligned}$$

其中, 第二个不等式成立是根据 $x_{i_0} \in K$ 和引理 1.3(iv), 所以

$$\mathcal{P}_K(x_i - \mu\xi_i) \in B(x_0, 2M)$$

进而

$$\mathcal{P}_K(x_i - \mu\xi_i) \in K \cap B(x_0, 2M) = C$$

所以

$$\mathcal{P}_C(x_i - \mu\xi_i) = \mathcal{P}_K(x_i - \mu\xi_i)$$

由于 $S'' \neq \varnothing$, 根据引理 4.15, $\overline{H}_i^1 \cap \overline{H}_i^2 \cap K \neq \varnothing$, 所以 $\overline{H}_i^1 \cap \overline{H}_i^2 \cap K \neq \varnothing$, 矛盾.

定理 4.18 设 $T: K \to 2^{\mathbb{R}^n}$ 是具有非空紧凸值的连续映射且满足假定 (4.3). 假设算法 4.5 产生一个无穷序列 $\{x_i\}$. 如果变分不等式问题 (4.1) 的解集合 $S \neq \varnothing$, 那么序列 $\{x_i\}$ 收敛到变分不等式问题 (4.1) 的一个解 x^* 满足 $x^* = \mathcal{P}_S(x_0)$.

证明 由于 $x_{i+1} := \mathcal{P}_{H_i^1 \cap H_i^2 \cap K}(x_0)$, 所以根据引理 4.14 和投影的定义有

$$\|x_{i+1} - x_0\| \leqslant \|x^* - x_0\|, \quad \forall x^* \in S$$

因此, 序列 $\{x_i\}$ 是有界的. 由于

$$x_{i+1} \in H_i^1 \cap H_i^2 \cap K \subset H_i^2$$

所以

$$\mathcal{P}_{H_i^2}(x_{i+1}) = x_{i+1}$$

又因为

$$\langle z - x_i, x_0 - x_i \rangle \leqslant 0, \quad \forall z \in H_i^2$$

由此可得

$$x_i = \mathcal{P}_{H_i^2}(x_0)$$

因此, 根据引理 1.3(iv) 有

$$\begin{aligned}\|\mathcal{P}_{H_i^2}(x_{i+1}) - \mathcal{P}_{H_i^2}(x_0)\|^2 \leqslant & \|x_{i+1} - x_0\|^2 \\ & - \|\mathcal{P}_{H_i^2}(x_{i+1}) - x_{i+1} + x_0 - \mathcal{P}_{H_i^2}(x_{i+1})\|^2\end{aligned}$$

即

$$\|x_{i+1} - x_i\|^2 \leqslant \|x_{i+1} - x_0\|^2 - \|x_i - x_0\|^2 \tag{4.32}$$

因而序列 $\{\|x_i - x_0\|\}$ 单调递增有界进而收敛, 同时, 由式 (4.32) 可推得

$$\lim_{i \to \infty} \|x_{i+1} - x_i\|^2 = 0 \tag{4.33}$$

另一方面, 由于

$$\mathcal{P}_{H_i^1}(x_i) = x_i - [\langle y_{k_i}, x_i - z_i \rangle / \|y_{k_i}\|^2] y_{k_i}$$

和 $x_{i+1} \in H_i^1$, 我们有

$$\begin{aligned}\|x_i - x_{i+1}\| & \geqslant \|x_i - \mathcal{P}_{H_i^1}(x_i)\| \\ & = \langle y_{k_i}, x_i - z_i \rangle / \|y_{k_i}\| \\ & \geqslant \sigma \eta_i \|r_\mu(x_i, \xi_i)\|^2 / \|y_{k_i}\|\end{aligned}$$

其中, 第二个不等式成立是根据式 (4.30). 所以根据式 (4.33) 有

$$\lim_{i\to\infty}\eta_i\|r_\mu(x_i,\xi_i)\|^2/\|y_{k_i}\|=0$$

由于 T 是具有紧值的连续映射, 根据引理 1.26,$\{T(x_i)\}$ 是有界的, 从而 $\{\xi_i\}$ 是有界的. 由于 $r_\mu(\cdot,\cdot)$ 是连续映射, 根据 z_i 的定义, 所以 $\{z_i\}$ 是有界的. 根据 T 的连续性知,$\{T(z_i)\}$ 是有界的, 进而序列 $\{y_{k_i}\}$ 是有界的. 由此可得

$$\lim_{i\to\infty}\eta_i\|r_\mu(x_i,\xi_i)\|^2=0 \tag{4.34}$$

由于序列 $\{x_i\}$ 是有界的, 故存在收敛的子序列 $\{x_{i_j}\}$, 设其极限为 $\overline{x}$.

如果 $\overline{x}$ 是变分不等式问题 (4.1) 的解, 接下来我们证明序列 $\{x_i\}$ 收敛于 $\overline{x}$. 令 $x^*=\mathcal{P}_S(x_0)$. 由于 $x^*\in S$, 根据引理 4.15, 有

$$x^*\in H^1_{i_j-1}\cap H^2_{i_j-1}\cap K,\quad \forall j$$

所以

$$\|x_{i_j}-x_0\|\leqslant\|x^*-x_0\|$$

因而

$$\begin{aligned}\|x_{i_j}-x^*\|^2=&\|x_{i_j}-x_0\|^2\\&+\|x_0-x^*\|^2+2\langle x_{i_j}-x_0,x_0-x^*\rangle\\ \leqslant&2\|x_0-x^*\|^2+2\langle x_{i_j}-x_0,x_0-x^*\rangle\end{aligned}$$

令 $j\to\infty$, 我们得到

$$\begin{aligned}\|\overline{x}-x^*\|^2\leqslant&2\|x_0-x^*\|^2+2\langle\overline{x}-x_0,x_0-x^*\rangle\\=&2\langle\overline{x}-x^*,x_0-x^*\rangle\leqslant0\end{aligned}$$

其中, 最后一个不等式成立是根据引理 1.1, $x^*=\mathcal{P}_S(x_0)$ 和 $\overline{x}\in S$. 所以

$$\overline{x}=x^*=\mathcal{P}_S(x_0)$$

因此序列 $\{x_i\}$ 有唯一的聚点 $\mathcal{P}_S(x_0)$, 这就证明了序列 $\{x_i\}$ 的全局收敛性.

现在假设 $\overline{x}$ 不是变分不等式问题 (4.1) 的解, 接下来首先证明算法 4.5 中的 k_i 不可能趋近于 ∞. 因为 T 是具有紧值的连续映射, 根据引理 1.26,$\{T(x_i):i\in N\}$ 是一个有界集, 根据 ξ_i 的定义,$\{\xi_i\}$ 是有界序列, 存在 $\{\xi_i\}$ 的一个聚点 $\overline{\xi}$, 那么存在

一个子序列 $\{\xi_{i_j}\}$ 收敛到 $\overline{\xi}$. 因为 T 是具有紧值的上半连续映射, 根据引理 1.27,T 是闭的, 由此 $\overline{\xi}\in T(\overline{x})$. 根据 k_i 的定义, 有

$$\langle u_i, r_\mu(x_i,\xi_i)\rangle < \sigma\|r_\mu(x_i,\xi_i)\|^2, \quad \forall u_i = \mathcal{P}_{T(x_i-\gamma^{k_i-1}r_\mu(x_i,\xi_i))}(\xi_i)$$

如果 $k_{i_j}\to\infty$, 那么

$$x_{i_j}-\gamma^{k_{i_j}-1}r_\mu(x_{i_j},\xi_{i_j})\to\overline{x}$$

根据 T 的下半连续性, 存在

$$\overline{\xi}_{i_j}\in T(x_{i_j}-\gamma^{k_{i_j}-1}r_\mu(x_{i_j},\xi_{i_j}))$$

使得

$$\overline{\xi}_{i_j}\to\overline{\xi}, \quad j\to\infty$$

由于

$$u_{i_j}=\mathcal{P}_{T(x_{i_j}-\gamma^{k_{i_j}-1}r_\mu(x_{i_j},\xi_{i_j}))}(\xi_{i_j})$$

所以

$$u_{i_j}\in T(x_{i_j}-\gamma^{k_{i_j}-1}r_\mu(x_{i_j},\xi_{i_j}))$$

$$\|u_{i_j}-\xi_{i_j}\|\leqslant\|\overline{\xi}_{i_j}-\xi_{i_j}\|$$

所以

$$\lim_{j\to\infty}u_{i_j}=\overline{\xi}$$

$$\langle u_{i_j}, r_\mu(x_{i_j},\xi_{i_j})\rangle < \sigma\|r_\mu(x_{i_j},\xi_{i_j})\|^2 \tag{4.35}$$

根据 $r_\mu(\cdot,\cdot)$ 的连续性, 在式 (4.35) 中令 $j\to\infty$, 我们得到

$$\langle\overline{\xi}, r_\mu(\overline{x},\overline{\xi})\rangle\leqslant\sigma\|r_\mu(\overline{x},\overline{\xi})\|^2$$

根据引理 1.2 有

$$\mu^{-1}\|r_\mu(\overline{x},\overline{\xi})\|^2\leqslant\sigma\|r_\mu(\overline{x},\overline{\xi})\|^2$$

由于 $r_\mu(\overline{x},\overline{\xi})\neq 0$ 和 $\mu<1/\sigma$, 我们得到矛盾. 所以 $\{k_i\}$ 是有界的, 根据 η_i 的定义,$\{\eta_i\}$ 是有界的.

根据式 (4.34) 和 $\{\eta_i\}$ 的有界性, 我们得到 $\lim\limits_{i\to\infty}\|r_\mu(x_i,\xi_i)\|=0$. 因为序列 $\{x_i\}$ 和序列 $\{\xi_i\}$ 是有界的, 存在 $\{(x_i,\xi_i)\}$ 的一个聚点 $(\overline{x},\overline{\xi})$. 因为 $r_\mu(\cdot,\cdot)$ 是连续映射, 所以 $r_\mu(\overline{x},\overline{\xi})=0$, 即 $\overline{x}$ 是变分不等式问题 (4.1) 的解. 类似于此定理前半部分的证明, 我们有 $\lim\limits_{i\to\infty}x_i=\overline{x}$.

定理 4.19 假设 T 满足定理 4.18 的假定条件并假设算法 4.5 产生一个无穷序列 $\{x_i\}$, 那么变分不等式问题 (4.1) 的解集合 $S=\varnothing$ 当且仅当算法 4.5 产生的序列 $\{x_i\}$ 发散.

证明 根据定理的结论我们只需证明: 如果变分不等式问题 (4.1) 的解集合 $S=\varnothing$, 那么算法 4.5 产生的序列 $\{x_i\}$ 发散. 由于式 (4.32) 在这种情况下也成立, 所以序列 $\{x_i-x_0\}$ 仍然单调递增. 我们断言

$$\lim_{i\to\infty}\|x_i-x_0\|^2=\infty$$

否则,$\{x_i\}$ 是有界的, 且根据式 (4.32) 有

$$\lim_{i\to\infty}\|x_{i+1}-x_i\|^2=0$$

类似于定理 4.18 的讨论可以得出: 序列 $\{x_i\}$ 的每个聚点均为变分不等式问题 (4.1) 的解, 这与变分不等式问题 (4.1) 的解集 $S=\varnothing$ 矛盾.

4.4 次梯度算法

在本节介绍的投影算法中, 变分不等式的可行集 K 由凸函数所确定.

令集合 K 为

$$K:=\{x\in\mathbb{R}^n:g(x)\leqslant 0\}\tag{4.36}$$

其中, $g:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ 为凸函数. 众所周知, 每个闭凸集能通过这种方式来表示, 即取 $g(x)=\operatorname{dist}(x,K)$, 其中 dist 是距离函数. 定义函数 g 在点 x 的次微分如下:

$$\partial g(x):=\{w\in\mathbb{R}^n:g(y)\geqslant g(x)+\langle w,y-x\rangle,\forall y\in\mathbb{R}^n\}\tag{4.37}$$

本节我们假定集合 $\mathrm{MVIP}(T,K)$ 是非空的, 映射 T 是连续的、具有非空紧凸值的且满足假定 (4.3).

类似于引理 1.24，我们有下面的结论.

引理 4.20 对任意 $x\in\mathbb{R}^n,w\in T(x)$ 和 $\mu>0$, 有

$$\min\{1,\mu\}\|r_1(x,w)\|\leqslant\|r_\mu(x,w)\|\leqslant\max\{1,\mu\}\|r_1(x,w)\|$$

下面的程序被用来寻找集合 K 中的一个点.

程序 A

输入: 点 $x\in\mathbb{R}^n$.

输出: 点 $R(x)$.

步骤 0. 如果 $x \in K$, 令 $R(x) = x$, 停止; 否则, 令 $y_0 := x, k := 0$.

步骤 1. 选取 $w_k \in \partial g(y_k)$, 令

$$y_{k+1} = y_k - 2g(y_k)w_k/\|w_k\|^2$$

步骤 2. 如果 $y_{k+1} \in K$, 令 $R(x) = y_{k+1}$, 停止; 否则, 令 $k =: k+1$, 回到步骤 1.

从程序 A 我们可以得到下面两个有用的结果 (参见文献 [84] 和 [85]).

引理 4.21 令 $x \in \mathbb{R}^n$, 则

$$R(x) \in K, \quad \|R(x) - y\| \leqslant \|x - y\|, \quad \forall y \in K$$

引理 4.22 程序 A 会在有限步迭代后终止.

算法 4.6 选取 $\widetilde{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ 和两个参数 $\gamma, \delta \in (0, 1)$. 令 $i = 0$.

步骤 1. 在程序 A 中输入 $x = \widetilde{x}_i$, 然后令 $x_i = R(\widetilde{x}_i)$.

步骤 2. 选取 $u_i \in T(x_i)$, 令 k_i 是满足下面不等式的最小非负整数:

$$v_i \in T(\mathcal{P}_K(x_i - \gamma^{k_i} u_i)) \tag{4.38}$$

$$\gamma^{k_i}\|u_i - v_i\| \leqslant (1-\delta)\|r_{\gamma^{k_i}}(x_i, u_i)\| \tag{4.39}$$

令 $\rho_i = \gamma^{k_i}$ 和

$$z_i = \mathcal{P}_K(x_i - \rho_i u_i) \tag{4.40}$$

如果 $r_{\rho_i}(x_i, u_i) = 0$, 停止.

步骤 3. 计算 $\widetilde{x}_{i+1} := \mathcal{P}_{H_i}(x_i - \rho_i v_i)$, 其中

$$H_i := \{x \in \mathbb{R}^n : h_i(x) \leqslant 0\}$$

$$h_i := \langle x_i - \rho_i u_i - z_i, x - z_i \rangle \tag{4.41}$$

令 $i := i+1$, 回到步骤 1.

注解 4.8 步骤 3 中的半空间 H_i 的边界超平面在点 z_i 支撑集合 K.

注解 4.9 $K \subseteq H_i$. 事实上, 根据引理 1.3(i) 和 H_i 的定义, 有

$$\langle x_i - \rho_i u_i - z_i, x - z_i \rangle \leqslant 0, \quad \forall x \in K$$

所以 $K \subseteq H_i$.

我们首先证明算法 4.16 是有定义的.

命题 4.23 如果 x_i 不是变分不等式问题 (4.1) 的解, 则存在非负整数 k_i 满足式 (4.38) 和式 (4.39).

证明 假设对所有 k 和所有 $v \in T(z_k) = T(\mathcal{P}_K(x_i - \gamma^k u_i))$, 有

$$\gamma^k \|u_i - v\| > (1-\delta)\|x_i - z_k\|$$

即

$$\begin{aligned}\|u_i - v\| &> \frac{1-\delta}{\gamma^k}\|r_{\gamma^k}(x_i, u_i)\| \\ &\geqslant \frac{1-\delta}{\gamma^k}\min\{1, \gamma^k\}\|r_1(x_i, u_i)\| \\ &= (1-\delta)\|r_1(x_i, u_i)\| \end{aligned} \tag{4.42}$$

其中, 第二个不等式根据引理 4.20, 而等式根据 $\gamma \in (0,1)$ 和 $k \geqslant 0$. 由于 $\mathcal{P}_K(\cdot)$ 连续且 $x_i \in K$, 故 $z_k = \mathcal{P}_K(x_i - \gamma^k u_i) \to x_i (k \to \infty)$. 由于 T 是下半连续的, $u_i \in T(x_i)$ 且 $z_k \to x_i (k \to \infty)$, 所以存在 $v_k \in T(z_k)$ 使得 $v_k \to u_i (k \to \infty)$. 因此, 从式 (4.42) 可得

$$\|u_i - v_k\| > (1-\delta)\|r_1(x_i, u_i)\|, \quad \forall k \tag{4.43}$$

在式 (4.43) 中令 $k \to \infty$, 有

$$0 = \|u_i - u_i\| \geqslant (1-\delta)\|r_1(x_i, u_i)\| > 0$$

矛盾. 证毕.

接下来我们证明算法 4.6 步骤 2 中的终止准则是有效的.

定理 4.24 在算法 4.6 中, 如果 $r_{\rho_i}(x_i, u_i) = 0$, 则 $x_i \in S$.

证明 如果 $r_{\rho_i}(x_i, u_i) = 0$, 则 $x_i = \mathcal{P}_K(x_i - \rho_i u_i)$. 由于 $\rho_i > 0$, 故从命题 4.1 可得 $x_i \in S$.

下面的辅助结果将被用来证明算法 4.6 的收敛性.

引理 4.25 设序列 $\{x_i\}$ 由算法 4.6 产生,$x^* \in S$. 如果假定 (4.3) 成立, 则

$$\|x_{i+1} - x^*\|^2 \leqslant \|x_i - x^*\|^2 - \delta(2-\delta)\|r_{\rho_i}(x_i, u_i)\|^2 \tag{4.44}$$

证明 由于 $v_i \in T(z_i)$ 和 $x^* \in S$, 故从假定 (4.3) 可得

$$\langle v_i, z_i - x^* \rangle \geqslant 0$$

所以

$$\langle v_i, \widetilde{x}_{i+1} - x^* \rangle \geqslant \langle v_i, \widetilde{x}_{i+1} - z_i \rangle \tag{4.45}$$

根据 H_i 的定义有

$$\langle \widetilde{x}_{i+1} - z_i, x_i - \rho_i u_i - z_i \rangle \leqslant 0$$

因此

$$\begin{aligned}\langle \widetilde{x}_{i+1} - z_i, x_i - \rho_i v_i - z_i \rangle &= \langle \widetilde{x}_{i+1} - z_i, x_i - \rho_i u_i - z_i \rangle \\ &\quad + \rho_i \langle \widetilde{x}_{i+1} - z_i, u_i - v_i \rangle \\ &\leqslant \rho_i \langle \widetilde{x}_{i+1} - z_i, u_i - v_i \rangle \end{aligned} \tag{4.46}$$

令 $t_i = x_i - \rho_i v_i$, 则

$$\begin{aligned}\|\widetilde{x}_{i+1} - x^*\|^2 &= \|\mathcal{P}_{H_i}(t_i) - x^*\|^2 \\ &= \langle \mathcal{P}_{H_i}(t_i) - t_i + t_i - x^*, \mathcal{P}_{H_i}(t_i) - t_i + t_i - x^* \rangle \\ &= \|t_i - x^*\|^2 + \|t_i - \mathcal{P}_{H_i}(t_i)\|^2 + 2\langle \mathcal{P}_{H_i}(t_i) - t_i, t_i - x^* \rangle\end{aligned}$$

由于

$$\begin{aligned}&2\|t_i - \mathcal{P}_{H_i}(t_i)\|^2 + 2\langle \mathcal{P}_{H_i}(t_i) - t_i, t_i - x^* \rangle \\ &= 2\langle t_i - \mathcal{P}_{H_i}(t_i), x^* - \mathcal{P}_{H_i}(t_i) \rangle \leqslant 0\end{aligned}$$

故

$$\|t_i - \mathcal{P}_{H_i}(t_i)\|^2 + 2\langle \mathcal{P}_{H_i}(t_i) - t_i, t_i - x^* \rangle \leqslant -\|t_i - \mathcal{P}_{H_i}(t_i)\|^2$$

因此

$$\begin{aligned}\|\widetilde{x}_{i+1} - x^*\|^2 &\leqslant \|t_i - x^*\|^2 - \|t_i - \mathcal{P}_{H_i}(t_i)\|^2 \\ &= \|x_i - \rho_i v_i - x^*\|^2 - \|x_i - \rho_i v_i - \mathcal{P}_{H_i}(t_i)\|^2 \\ &= \|x_i - x^*\|^2 - \|x_i - \widetilde{x}_{i+1}\|^2 + 2\rho_i \langle x^* - \widetilde{x}_{i+1}, v_i \rangle \\ &\leqslant \|x_i - x^*\|^2 - \|x_i - \widetilde{x}_{i+1}\|^2 + 2\rho_i \langle z_i - \widetilde{x}_{i+1}, v_i \rangle\end{aligned}$$

其中, 最后一个不等式是根据式 (4.45). 所以

$$\begin{aligned}\|\widetilde{x}_{i+1} - x^*\|^2 &\leqslant \|x_i - x^*\|^2 - \|x_i - \widetilde{x}_{i+1}\|^2 + 2\rho_i \langle z_i - \widetilde{x}_{i+1}, v_i \rangle \\ &= \|x_i - x^*\|^2 - \langle x_i - z_i + z_i - \widetilde{x}_{i+1}, x_i - z_i + z_i - \widetilde{x}_{i+1} \rangle \\ &\quad + 2\rho_i \langle z_i - \widetilde{x}_{i+1}, v_i \rangle\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \|x_i - x^*\|^2 - \|x_i - z_i\|^2 - \|z_i - \widetilde{x}_{i+1}\|^2 \\
&\quad +2\langle \widetilde{x}_{i+1} - z_i, x_i - \rho_i v_i - z_i \rangle \\
&\leqslant \|x_i - x^*\|^2 - \|x_i - z_i\|^2 - \|z_i - \widetilde{x}_{i+1}\|^2 \\
&\quad +2\rho_i \langle \widetilde{x}_{i+1} - z_i, u_i - v_i \rangle \\
&\leqslant \|x_i - x^*\|^2 - \|r_{\rho_i}(x_i, u_i)\|^2 - \|z_i - \widetilde{x}_{i+1}\|^2 \\
&\quad +2(1-\delta)\|\widetilde{x}_{i+1} - z_i\|\|r_{\rho_i}(x_i, u_i)\|
\end{aligned} \tag{4.47}
$$

其中, 第二个不等式是根据式 (4.45), 最后一个不等式是根据 Cauchy-Schwarz 不等式和式 (4.39).

此外

$$
\begin{aligned}
0 &\leqslant ((1-\delta)\|r_{\rho_i}(x_i, u_i)\| - \|\widetilde{x}_{i+1} - z_i\|)^2 \\
&= (1-\delta)^2\|r_{\rho_i}(x_i, u_i)\|^2 - 2(1-\delta)\|\widetilde{x}_{i+1} - z_i\|\|r_{\rho_i}(x_i, u_i)\| + \|z_i - \widetilde{x}_{i+1}\|^2
\end{aligned}
$$

所以

$$
2(1-\delta)\|\widetilde{x}_{i+1} - z_i\|\|r_{\rho_i}(x_i, u_i)\| \leqslant (1-\delta)^2\|r_{\rho_i}(x_i, u_i)\|^2 + \|z_i - \widetilde{x}_{i+1}\|^2 \tag{4.48}
$$

结合式 (4.47) 和式 (4.48), 有

$$
\|\widetilde{x}_{i+1} - x^*\|^2 \leqslant \|x_i - x^*\|^2 - \delta(2-\delta)\|r_{\rho_i}(x_i, u_i)\|^2 \tag{4.49}
$$

从式 (4.49), 并根据引理 4.21, 有

$$
\begin{aligned}
\|x_{i+1} - x^*\|^2 &\leqslant \|\widetilde{x}_{i+1} - x^*\|^2 \\
&\leqslant \|x_i - x^*\|^2 - \delta(2-\delta)\|r_{\rho_i}(x_i, u_i)\|^2
\end{aligned}
$$

证毕.

定理 4.26　如果映射 $T: K \to 2^{\mathbb{R}^n}$ 是连续的、具有非空紧凸值的, 且假定 (4.3) 成立, 则算法 4.6 产生的序列收敛到变分不等式问题 (4.1) 的一个解 $\overline{x}$.

证明　令 $x^* \in S$. 由于 $0 < \delta < 1$, 故 $\delta(2-\delta) \in (0, 1)$. 由此从引理 4.25 可得

$$
\delta(2-\delta)\|r_{\rho_i}(x_i, u_i)\|^2 \leqslant \|x_i - x^*\|^2 - \|x_{i+1} - x^*\|^2
$$

因此序列 $\{\|x_{i+1} - x^*\|^2\}$ 单调不增, 从而收敛. 所以序列 $\{x_i\}$ 有界且

$$
0 \leqslant \delta(2-\delta)\|r_{\rho_i}(x_i, u_i)\|^2 \leqslant \|x_i - x^*\|^2 - \|x_{i+1} - x^*\|^2 \to 0, \quad i \to \infty
$$

这蕴含

$$\lim_{i\to\infty}\|r_{\rho_i}(x_i,u_i)\|^2=0 \tag{4.50}$$

根据序列 $\{x_i\}$ 的有界性可知, 存在子序列 $\{x_{i_j}\}$ 使得 $x_{i_j}\to\overline{x}(j\to\infty)$.

如果 $\overline{x}$ 是变分不等式问题 (4.1) 的一个解, 我们接下来证明整个序列 $\{x_i\}$ 收敛到 $\overline{x}$. 在前面的证明中用 $\overline{x}$ 代替 x^*, 得到序列 $\{\|x_i-\overline{x}\|\}$ 是单调不增的, 从而收敛. 由于 $\overline{x}$ 是序列 $\{x_i\}$ 的一个聚点, 因此 $\{\|x_i-\overline{x}\|\}$ 的某个子序列收敛到 0. 这证明了整个序列 $\{\|x_i-\overline{x}\|\}$ 收敛到 0, 因此 $\lim\limits_{i\to\infty}x_i=\overline{x}$.

现假设 $\overline{x}$ 不是变分不等式问题 (4.1) 的解. 首先证明算法 4.6 中的 k_i 不可能趋近于 ∞. 由于映射 T 是连续且紧值的, 故根据引理 1.26 可知, $\{T(x_i):i\in N\}$ 是有界集, 从而序列 $\{u_i\}$ 有界. 所以存在子序列 $\{u_{i_j}\}$ 收敛到 $\overline{u}$. 由于映射 T 是上半连续且紧值的, 故引理 1.27 表明映射 T 是闭的, 从而 $\overline{u}\in T(\overline{x})$. 根据 k_i 的定义有

$$\gamma^{k_i-1}\|u_i-v\|>(1-\delta)\|r_{\gamma^{k_i-1}}(x_i,u_i)\|,\quad \forall v\in T(z_{k_i-1})=T(\mathcal{P}_K(x_i-\gamma^{k_i-1}u_i))$$

即

$$\begin{aligned}\|u_i-v\|&>\frac{1-\delta}{\gamma^{k_i-1}}\|r_{\gamma^{k_i-1}}(x_i,u_i)\|\\&\geqslant\frac{1-\delta}{\gamma^{k_i-1}}\min\{1,\gamma^{k_i-1}\}\|r_1(x_i,u_i)\|\\&=(1-\delta)\|r_1(x_i,u_i)\|,\quad \forall v\in T(z_{k_i-1})\\&=T(\mathcal{P}_K(x_i-\gamma^{k_i-1}u_i)),\quad \forall k_i\geqslant 1\end{aligned} \tag{4.51}$$

其中, 第二个不等式是根据引理 4.20, 等式是根据 $\gamma\in(0,1)$.

如果 $k_{i_j}\to\infty$, 则 $\mathcal{P}_K(x_{i_j}-\gamma^{k_{i_j}-1}u_{i_j})\to\overline{x}$. 根据映射 T 的下半连续性可知, 存在 $\overline{u}_{i_j}\in T(\mathcal{P}_K(x_{i_j}-\gamma^{k_{i_j}-1}u_{i_j}))$ 使得 $\overline{u}_{i_j}\to\overline{u}(j\to\infty)$. 所以, 从式 (4.51) 可得

$$\|u_{i_j}-\overline{u}_{i_j}\|>(1-\delta)\|r_1(x_{i_j},u_{i_j})\| \tag{4.52}$$

在式 (4.52) 中令 $j\to\infty$, 根据 $r_\mu(\cdot,\cdot)$ 的连续性, 得到如下矛盾:

$$0\geqslant(1-\delta)\|r_1(\overline{x},\overline{u})\|^2>0$$

所以序列 $\{k_i\}$ 有界, 从而 $\{\rho_i\}$ 有界.

根据引理 4.20 有

$$\begin{aligned}\|r_{\rho_i}(x_i,u_i)\|&\geqslant\min\{1,\rho_i\}\|r_1(x_i,u_i)\|\\&=\rho_i\|r_1(x_i,u_i)\|\end{aligned} \tag{4.53}$$

因此从式 (4.50) 和式 (4.53) 可得

$$\lim_{i\to\infty}\rho_i\|r_1(x_i,u_i)\|=0 \tag{4.54}$$

根据 $\{\rho_i\}$ 的有界性有 $\lim\limits_{i\to\infty}\|r_1(x_i,u_i)\|=0$. 由于 $r_1(\cdot,\cdot)$ 连续且序列 $\{x_i\}$ 和 $\{u_i\}$ 有界, 故 $\{(x_i,u_i)\}$ 存在聚点 $(\overline{x},\overline{u})$ 满足 $r_1(\overline{x},\overline{u})=0$. 这蕴含 $\overline{x}$ 为变分不等式问题 (4.1) 的解. 类似于前面的证明可得 $\lim\limits_{i\to\infty}x_i=\overline{x}$.

现在介绍算法 4.6 所产生迭代序列收敛率的一个结果.

任给 $\theta>0$, 定义

$$P(\theta):=\{(x,w)\in K\times\mathbb{R}^n: w\in T(x),\|r_1(x,w)\|\leqslant\theta\}$$

称 T 在 K 上是 L-Lipschitz 连续的, 如果存在常数 $L>0$ 使得

$$D(T(x),T(y))\leqslant L\|x-y\|$$

其中, D 表示 Hausdorff 度量.

定理 4.27 *在定理的假定下, 如果映射 T 是 L-Lipschitz 连续的 $(L>0)$ 且存在常数 $c,\theta>0$ 使得*

$$\operatorname{dist}(x,S)\leqslant c\|r_1(x,w)\|^{1/2},\quad \forall (x,w)\in P(\theta) \tag{4.55}$$

则存在常数 $\alpha>0$ 使得对充分大的 i 有

$$\operatorname{dist}(x_i,S)\leqslant\frac{1}{\sqrt{\alpha i+\operatorname{dist}^{-2}(x_0,S)}}$$

证明 令 $\rho:=\min\{1/2,L^{-1}\gamma(1-\delta)\}$. 首先证明 $\rho_i>\rho$ 对所有的 i 成立. 根据 ρ_i 的定义有 $\rho_i\in(0,1]$. 如果 $\rho_i=1$, 则显然 $\rho_i>\dfrac{1}{2}\geqslant\rho$. 现假定 $\rho_i<1$. 由于 $\rho_i=\gamma^{k_i}$, 故 $k_i\geqslant 1$. 因此 k_i 的定义蕴含

$$\gamma^{k_i-1}\|u_i-v\|>(1-\delta)\|r_{\gamma^{k_i-1}}(x_i,u_i)\|,\quad \forall v\in T(z_{k_i-1})=T(\mathcal{P}_K(x_i-\gamma^{k_i-1}u_i))$$

即

$$\|u_i-v\|>\frac{1-\delta}{\gamma^{k_i-1}}\|r_{\gamma^{k_i-1}}(x_i,u_i)\|,\quad \forall v\in T(z_{k_i-1})=T(\mathcal{P}_K(x_i-\gamma^{k_i-1}u_i)),\quad \forall k_i\geqslant 1$$

由于 $u_i\in T(x_i)$ 且 T 是紧值的, 根据 Hausdorff 度量的定义知, 存在 $v_i\in T(\mathcal{P}_K(x_i-\gamma^{k_i-1}u_i))$ 使得

$$\frac{1-\delta}{\gamma^{k_i-1}}\|r_{\gamma^{k_i-1}}(x_i,u_i)\|<\|u_i-v_i\|\leqslant H(T(x_i),T(\mathcal{P}_K(x_i-\gamma^{k_i-1}u_i)))\leqslant L\|r_{\gamma^{k_i-1}}(x_i,u_i)\|$$

所以 $\rho_i > L^{-1}\gamma(1-\delta) \geqslant \rho$.

令 $x^* \in \mathcal{P}_S(x_i)$. 根据式 (4.44) 和式 (4.55) 知, 对充分大的 i 有

$$\begin{aligned}\operatorname{dist}^2(x_{i+1}, S) &\leqslant \|x_{i+1} - x^*\|^2 \leqslant \|x_i - x^*\|^2 - \delta(2-\delta)\|r_{\rho_i}(x_i, u_i)\|^2 \\ &\leqslant \|x_i - x^*\|^2 - \delta(2-\delta)\rho_i^2\|r_1(x_i, u_i)\|^2 \\ &\leqslant \|x_i - x^*\|^2 - \delta(2-\delta)\rho^2\|r_1(x_i, u_i)\|^2 \\ &\leqslant \operatorname{dist}^2(x_i, S) - \delta(2-\delta)\rho^2 c^{-4}\operatorname{dist}^4(x_i, S)\end{aligned}$$

其中, 第二个不等式是根据引理 4.20, 第三个不等式是根据 $\rho_i > \rho$.

记 $\alpha =: \delta(2-\delta)\rho^2 c^{-4}$. 根据引理 1.31 有

$$\operatorname{dist}(x_i, S) \leqslant \operatorname{dist}(x_0, S)/\sqrt{\alpha i \operatorname{dist}^2(x_0, S) + 1} = 1/\sqrt{\alpha i + \operatorname{dist}^{-2}(x_0, S)}$$

证毕.

下面的例子表明, 如果 T 是伪单调的, 则假定 (4.55) 也可能成立.

例 4.1 令 $K := [-1, \infty)$ 和 $T(x) = \{x^4 + 1\}$, 则 T 是伪单调的且变分不等式问题 (4.1) 的解集为 $S = \{-1\}$. 若令 $c = 1$ 和 $\theta = 1$, 则假定 (4.55) 成立.

4.5 数值实验

本节通过实例给出了前述主要算法的数值比较结果, 关于数值实验比较结果的更多细节, 可参考文献 [45]、[48]、[50]、[52].

我们通过 MATLAB 编程 (CPU intel core i5 和 MATLAB 7.0.0.19920(R14)), 给出了前述主要算法的数值实验结果. 在下面的表格中, “It.” 表示迭代数目, “CPU” 表示 CPU 运行时间 (单位: s), ε 表示当 $\|r_\mu(x,\xi)\| \leqslant \varepsilon$ 时程序结束.

例 4.2 令 $n = 3$, 如下定义 $T: K \to 2^{\mathbb{R}^n}$:

$$T(x) := \{(t, t - x_1, t - x_2) : t \in [0, 1]\}$$

其中

$$K := \left\{x \in \mathbb{R}^n_+ : \sum_{i=1}^n x_i = 1\right\}$$

容易检验, 集合 K 和映射 T 满足定理的条件, 且 $(0, 0, 1)$ 是变分不等式问题 (4.1) 的一个解. 在算法 4.1、算法 4.2 和算法 4.5 中, 我们选取 $\sigma = 0.8, \gamma = 0.6$ 和 $\mu = 1$, 初始点 $x_0 = (0.3, 0.4, 0.3)$; 在算法 4.6 中, 我们选取 $\delta = \gamma = 0.5$ 和 $\mu = 1$, 初始点 $x_0 = (0.3, 0.4, 0.3)$. 数值实验结果见表 4.1 和表 4.2.

表 4.1　算法 4.1 与算法 4.2 的数值比较结果

ε	算法 4.1		算法 4.2	
	It.	CPU	It.	CPU
10^{-7}	55	0.358802	24	0.187201
10^{-5}	39	0.296402	18	0.171601
10^{-3}	23	0.234002	11	0.171601

表 4.2　算法 4.5 与算法 4.6 的数值比较结果

ε	算法 4.5		算法 4.6	
	It.	CPU	It.	CPU
10^{-7}	24	0.234001	13	0.343202
10^{-5}	17	0.234001	10	0.327602
10^{-3}	10	0.187201	6	0.312002

第 5 章　与集合序列相关的投影算法

本章介绍了求解单值变分不等式、集值变分不等式和广义变分不等式的新的投影算法，该方法的特点是当前迭代点在集合序列 K_i 中，该集合序列上图收敛到变分不等式问题的可行集 K，而下一步迭代点是到超平面与集合 K_{i+1} 的交上的投影. 在所涉及映射是伪单调和连续的假定下，我们证明了所提出的算法强收敛到变分不等式问题的解.

5.1　单值变分不等式

我们考虑如下的单值变分不等式问题：求 $x^* \in K$ 使得

$$\langle T(x^*), y - x^* \rangle \geqslant 0, \quad \forall y \in K \tag{5.1}$$

其中，K 是 $\mathbb{R}^n$ 的非空闭凸子集，$T : K \to \mathbb{R}^n$ 为单值映射.

令 S_1 为变分不等式问题 (5.1) 的解集. 在本节中我们假定问题 (5.1) 的解集 $S_1 \neq \varnothing$, T 关于集合 S_1 是伪单调的，即

$$\langle T(y), y - x \rangle \geqslant 0, \quad \forall y \in K, \forall x \in S_1 \tag{5.2}$$

如果 T(在集合 K 上) 是伪单调的，则性质 (5.2) 成立.

用 NCCS($\mathbb{R}^n$) 表示 $\mathbb{R}^n$ 的非空闭凸子集族. 设 $\{K_i\}$ 为 NCCS($\mathbb{R}^n$) 中的集合序列.

对 $\forall x \in \mathbb{R}^n$ 和 $\mu > 0$，记

$$r_\mu^i(x) := x - \mathcal{P}_{K_i}(x - \mu T(x))$$

类似于引理 1.24 的证明，我们有下面的结论.

引理 5.1　*对 $\forall x \in \mathbb{R}^n$ 和 $\mu > 0$，有*

$$\min\{1, \mu\} \|r_1^i(x)\| \leqslant \|r_\mu^i(x)\| \leqslant \max\{1, \mu\} \|r_1^i(x)\| \tag{5.3}$$

接下来我们介绍求解变分不等式问题 (5.1) 的如下投影算法.

算法 5.1　设 $\{K_i\}$ 是 NCCS($\mathbb{R}^n$) 中的集合序列且满足 $K_i \stackrel{\text{epi}}{\to} K$. 选取 $x_1 \in K_1$ 和参数 $\theta, \sigma \in (0,1)$. 令 $i = 1$.

步骤 1. 令 k_i 是满足下面不等式的最小非负整数 k:

$$\gamma^k \|T(x_i) - T(\mathcal{P}_{K_i}(x_i - \gamma^k T(x_i)))\| \leqslant \sigma \|r^i_{\theta^k}(x_i)\| \tag{5.4}$$

令 $\eta_i = \theta^{k_i}$ 和

$$y_i = \mathcal{P}_{K_i}(x_i - \eta_i T(x_i))$$

步骤 2. 计算 $x_{i+1} := \mathcal{P}_{H_i \cap K_{i+1}}(x_i - \eta_i T(y_i))$, 其中

$$H_i := \{x \in \mathbb{R}^n : \langle (x_i - \eta_i T(x_i)) - y_i, x - y_i \rangle \leqslant 0\}$$

令 $i := i + 1$, 并回到步骤 1.

注解 5.1　根据引理 1.3(i) 和 H_i 的定义, 有

$$\forall x \in K_i, \langle x_i - \eta_i T(x_i) - y_i, x - y_i \rangle \leqslant 0$$

所以 $K_i \subseteq H_i$.

首先, 我们证明算法 5.1 是可行的.

命题 5.2　假设对所有的 $i \geqslant 0$ 有 $K_i \subseteq K$, 则存在非负整数 k_i 满足式 (5.4).

证明　如果对某个 $n_0 \geqslant 0$ 有 $r^i_{\theta^{n_0}}(x_i) = 0$, 只需取 $k_i = n_0$ 即可.

现假定对某个 $n_1 \geqslant 0$, $r^i_{\theta^{n_1}}(x_i) \neq 0$. 用反证法. 假设对所有的 k 和 $y_k = \mathcal{P}_{K_i}(x_i - \theta^k T(x_i))$, 有

$$\theta^k \|T(x_i) - T(y_k)\| > \sigma \|r^i_{\theta^k}(x_i)\|$$

即

$$\begin{aligned}
\|T(x_i) - T(y_k)\| &> \frac{\sigma}{\theta^k} \|r^i_{\theta^k}(x_i)\| \\
&\geqslant \frac{\sigma}{\theta^k} \min\{1, \theta^k\} \|r^i_1(x_i)\| \\
&= \sigma \|r^i_1(x_i)\|
\end{aligned} \tag{5.5}$$

其中, 第二个不等式根据引理 5.1, 而等式是根据 $\theta \in (0,1)$ 和 $k \geqslant 0$. 由于 $\mathcal{P}_{K_i}(\cdot)$ 连续且 $x_i \in K_i$, 故 $y_k = \mathcal{P}_{K_i}(x_i - \theta^k T(x_i)) \to x_i$ $(k \to \infty)$. 由于 $r_{\theta^{n_1}}(x_i) \neq 0$, 故根据引理 5.1 可知

$$0 < \|r^i_{\theta^{n_1}}(x_i)\| \leqslant \max\{1, \theta^{n_1}\} \|r^i_1(x_i)\| = \|r^i_1(x_i)\|$$

其中, 最后一个等式是根据 $\theta^{n_1} \leqslant 1$. 由于T在K上连续, 在式 (5.5) 中令 $k \to \infty$, 有

$$0 = \|T(x_i) - T(x_i)\| \geqslant \sigma \|r_1^i(x_i)\| > 0$$

矛盾. 证毕.

引理 5.3 假设对所有的 $i \geqslant 1, S_1 \subseteq K_i \subseteq K$ $K_i \overset{\text{epi}}{\to} K$, 且假定 (5.2) 成立. 设 $\{x_i\}$ 是算法 5.1 产生的序列, $x^* \in S_1$, 则

$$\|x_{i+1} - x^*\|^2 \leqslant \|x_i - x^*\|^2 - (1 - \sigma^2)\eta_i^2 \|r_1^i(x_i)\|^2 \tag{5.6}$$

证明 由于 $x^* \in S_1$, 故从假定 (5.2) 可得

$$\langle T(y_i), y_i - x^* \rangle \geqslant 0$$

因此

$$\langle T(y_i), x_{i+1} - x^* \rangle \geqslant \langle T(y_i), x_{i+1} - y_i \rangle \tag{5.7}$$

根据步骤 2, 有

$$\langle x_{i+1} - y_i, (x_i - \eta_i T(x_i)) - y_i \rangle \leqslant 0$$

所以

$$\begin{aligned}\langle x_{i+1} - y_i, (x_i - \eta_i T(y_i)) - y_i \rangle &= \langle x_{i+1} - y_i, x_i - \eta_i T(x_i) - y_i \rangle \\ &\quad + \eta_i \langle x_{i+1} - y_i, T(x_i) - T(y_i) \rangle \\ &\leqslant \eta_i \langle x_{i+1} - y_i, T(x_i) - T(y_i) \rangle \end{aligned} \tag{5.8}$$

记 $z_i = x_i - \eta_i T(y_i)$, 则有

$$\begin{aligned}\|x_{i+1} - x^*\|^2 &= \|\mathcal{P}_{H_i \cap K_{i+1}}(z_i) - x^*\|^2 \\ &= \langle \mathcal{P}_{H_i \cap K_{i+1}}(z_i) - z_i + z_i - x^*, \mathcal{P}_{H_i \cap K_{i+1}}(z_i) - z_i + z_i - x^* \rangle \\ &= \|z_i - x^*\|^2 + \|z_i - \mathcal{P}_{H_i \cap K_{i+1}}(z_i)\|^2 \\ &\quad + 2\langle \mathcal{P}_{H_i \cap K_{i+1}}(z_i) - z_i, z_i - x^* \rangle \end{aligned}$$

由于

$$\begin{aligned}&2\|z_i - \mathcal{P}_{H_i \cap K_{i+1}}(z_i)\|^2 + 2\langle \mathcal{P}_{H_i \cap K_{i+1}}(z_i) - z_i, z_i - x^* \rangle \\ =\, &2\langle z_i - \mathcal{P}_{H_i \cap K_{i+1}}(z_i), x^* - \mathcal{P}_{H_i \cap K_{i+1}}(z_i) \rangle \leqslant 0\end{aligned}$$

故有

$$\|z_i - \mathcal{P}_{H_i\cap K_{i+1}}(z_i)\|^2 + 2\langle \mathcal{P}_{H_i\cap K_{i+1}}(z_i) - z_i, z_i - x^*\rangle \leqslant -\|z_i - \mathcal{P}_{H_i\cap K_{i+1}}(z_i)\|^2$$

因此

$$\begin{aligned}\|x_{i+1} - x^*\|^2 &\leqslant \|z_i - x^*\|^2 - \|z_i - \mathcal{P}_{H_i\cap K_{i+1}}(z_i)\|^2\\ &= \|(x_i - \eta_i T(y_i)) - x^*\|^2 - \|(x_i - \eta_i T(y_i)) - \mathcal{P}_{H_i\cap K_{i+1}}(z_i)\|^2\\ &= \|x_i - x^*\|^2 - \|x_i - x_{i+1}\|^2 + 2\eta_i\langle x^* - x_{i+1}, T(y_i)\rangle\\ &\leqslant \|x_i - x^*\|^2 - \|x_i - x_{i+1}\|^2 + 2\eta_i\langle y_i - x_{i+1}, T(y_i)\rangle\end{aligned}$$

其中, 最后一个不等式是根据不等式 (5.7). 所以

$$\begin{aligned}\|x_{i+1} - x^*\|^2 &\leqslant \|x_i - x^*\|^2 - \|x_i - x_{i+1}\|^2 + 2\eta_i\langle y_i - x_{i+1}, T(y_i)\rangle\\ &= \|x_i - x^*\|^2 - \langle x_i - y_i + y_i - x_{i+1}, x_i - y_i + y_i - x_{i+1}\rangle\\ &\quad +2\eta_i\langle y_i - x_{i+1}, T(y_i)\rangle\\ &= \|x_i - x^*\|^2 - \|x_i - y_i\|^2 - \|y_i - x_{i+1}\|^2\\ &\quad +2\langle x_{i+1} - y_i, x_i - \eta_i T(y_i) - y_i\rangle\\ &\leqslant \|x_i - x^*\|^2 - \|x_i - y_i\|^2 - \|y_i - x_{i+1}\|^2\\ &\quad +2\eta_i\langle x_{i+1} - y_i, T(x_i) - T(y_i)\rangle\\ &\leqslant \|x_i - x^*\|^2 - \|x_i - y_i\|^2 - \|y_i - x_{i+1}\|^2\\ &\quad +2\sigma\|x_{i+1} - y_i\|\|x_i - y_i\|\end{aligned} \tag{5.9}$$

其中, 第二个不等式是根据式 (5.8), 而最后一个不等式是根据 Cauchy-Schwarz 不等式和式 (5.4).

由于

$$\begin{aligned}&(\sigma\|x_i - y_i\| - \|x_{i+1} - y_i\|)^2\\ &= \sigma^2\|x_i - y_i\|^2 - 2\sigma\|x_{i+1} - y_i\|\|x_i - y_i\| + \|y_i - x_{i+1}\|^2\\ &\geqslant 0\end{aligned}$$

故

$$2\sigma\|x_{i+1} - y_i\|\|x_i - y_i\| \leqslant \sigma^2\|x_i - y_i\|^2 + \|y_i - x_{i+1}\|^2 \tag{5.10}$$

结合式 (5.9) 和式 (5.10), 可得

$$\begin{aligned}\|x_{i+1} - x^*\|^2 &\leqslant \|x_i - x^*\|^2 - (1-\sigma^2)\|x_i - y_i\|^2\\ &= \|x_i - x^*\|^2 - (1-\sigma^2)\|r^i_{\eta_i}(x_i)\|^2\end{aligned} \tag{5.11}$$

从引理 5.1 可得

$$\|r^i_{\eta_i}(x_i)\| \geqslant \min\{1,\eta_i\}\|r^i_1(x_i)\| = \eta_i\|r^i_1(x_i)\| \tag{5.12}$$

因此，从式 (5.11) 和式 (5.12) 可知式 (5.6) 成立.

定理 5.4 假设对所有的 $i \geqslant 1$ 有 $S_1 \subseteq K_i \subseteq K$, $K_i \xrightarrow{\text{epi}} K$, 且假定 (5.2) 成立. 如果 $T: K \to \mathbb{R}^n$ 在 K 上连续, 那么算法 5.1 产生的序列 $\{x_i\}$ 收敛到问题 (5.1) 的一个解 $\overline{x}$.

证明 令 $x^* \in S_1$. 由于 $0 < \sigma < 1$, 故 $(1-\sigma^2) \in (0,1)$. 因此，从引理 5.3 可得

$$(1-\sigma^2)\eta_i^2\|r^i_1(x_i)\|^2 \leqslant \|x_i - x^*\|^2 - \|x_{i+1} - x^*\|^2$$

由此可见, 序列 $\{\|x_{i+1} - x^*\|^2\}$ 是非递增的, 从而收敛. 所以序列 $\{x_i\}$ 有界, 且

$$0 \leqslant (1-\sigma^2)\eta_i^2\|r^i_1(x_i)\|^2 \leqslant \|x_i - x^*\|^2 - \|x_{i+1} - x^*\|^2 \to 0, \quad i \to \infty$$

这蕴含

$$\lim_{i\to\infty} \eta_i\|r^i_1(x_i)\| = 0 \tag{5.13}$$

我们考虑如下两种情况:

情形 1 假设 $\limsup\limits_{i\to\infty} \eta_i > 0$. 由此根据式 (5.13) 有 $\liminf\limits_{i\to\infty} \|r_1(x_i)\| = 0$. 由于 $\{x_i\}$ 有界和映射 T 是连续的, 故根据引理 1.32 可知, 序列 $\{x_i\}$ 存在聚点 $\overline{x}$ 满足 $r_1(\overline{x}) = 0$, 即 $\overline{x}$ 是问题 (5.1) 的一个解. 接下来证明 $x_i \to \overline{x}(i \to \infty)$. 在前面证明中用 $\overline{x}$ 代替 x^* 可得, 序列 $\{\|x_i - \overline{x}\|\}$ 是非递增的, 进而收敛. 由于 $\overline{x}$ 是序列 $\{x_i\}$ 的一个聚点, 故 $\{\|x_i - \overline{x}\|\}$ 的某个子序列收敛到 0. 这就证明了整个序列 $\{\|x_i - \overline{x}\|\}$ 收敛到 0, 因此 $\lim\limits_{i\to\infty} x_i = \overline{x}$.

情形 2 假设 $\lim\limits_{i\to\infty} \eta_i = 0$. 根据 η_i 的定义知, 对所有的 $k_i \geqslant 1$, 有

$$\begin{aligned}\|T(x_i) - T(\mathcal{P}_{K_i}(x_i - \theta^{k_i-1}T(x_i)))\| &> \frac{\sigma}{\theta^{k_i-1}}\|x_i - \mathcal{P}_{K_i}(x_i - \theta^{k_i-1}T(x_i))\| \\ &= \frac{\sigma}{\theta^{k_i-1}}\|r^i_{\theta^{k_i-1}}(x_i)\| \\ &\geqslant \sigma\|r^i_1(x_i)\|\end{aligned}$$

其中, 第二个不等式是根据引理 5.1. 所以

$$\|T(x_i) - T(\mathcal{P}_{K_i}(x_i - \theta^{-1}\eta_i T(x_i)))\| > \sigma\|r^i_1(x_i)\| \tag{5.14}$$

设 $\overline{x}$ 是序列$\{x_i\}$的任一聚点，则存在子序列 $\{x_{i_j}\}$ 收敛到 $\overline{x}$ 因此，从式 (5.14) 可得

$$\|T(x_{i_j}) - T(\mathcal{P}_{K_{i_j}}(x_{i_j} - \theta^{-1}\eta_{i_j} T(x_{i_j})))\| > \sigma\|r^{i_j}_1(x_{i_j})\| \tag{5.15}$$

令 $j \to \infty$, 根据引理 1.32 和映射 T 的连续性, 有

$$0 = \|T(\overline{x}) - T(\overline{x})\| \geqslant \sigma\|r_1(\overline{x})\|$$

所以 $r_1(\overline{x}) = 0$. 这蕴含了 $\overline{x}$ 是变分不等式问题 (5.1) 的一个解. 类似于前面的证明, 有 $\lim\limits_{i\to\infty} x_i = \overline{x}$.

算法 5.2 设 $\{K_i\}$ 是 NCCS($\mathbb{R}^n$) 使得 $K_i \xrightarrow{\text{epi}} K$ 的集合序列. 选取 $x_1 \in K_1$ 和参数 $\theta, \sigma \in (0,1)$. 令 $i = 1$.

步骤 1. 设 k_i 是满足下面不等式的最小正整数 k:

$$\theta^k\|T(x_i) - T(\mathcal{P}_{K_i}(x_i - \theta^k T(x_i)))\| \leqslant \sigma\|r^i_{\theta^k}(x_i)\| \tag{5.16}$$

令 $\eta_i = \theta^{k_i}$ 和

$$y_i = \mathcal{P}_{K_i}(x_i - \eta_i T(x_i))$$

步骤 2. 计算

$$x_{i+1} := \mathcal{P}_{K_i}(x_i - \eta_i T(y_i)) \tag{5.17}$$

令 $i := i+1$, 并回到步骤 1.

接下来我们先证明算法 5.2 是可行的.

命题 5.5 假设对所有的 $i \geqslant 0$, $K_i \subseteq K$, 则存在非负整数 k_i 满足式 (5.16).

该性质的证明类似于性质 5.2, 故略去.

引理 5.6 设对所有 $i \geqslant 1$, 有 $S_1 \subseteq K_i \subseteq K$, $K_i \xrightarrow{\text{epi}} K$, 且假定 (5.2) 成立. 设 $\{x_i\}$ 是算法 5.2 产生的序列,$x^* \in S_1$. 则

$$\|x_{i+1} - x^*\|^2 \leqslant \|x_i - x^*\|^2 - (1-\sigma^2)\eta_i^2\|r^i_1(x_i)\|^2$$

证明 由于 $x^* \in S_1$, 故从假定 (5.2) 可得

$$\langle T(y_i), y_i - x^*\rangle \geqslant 0$$

所以

$$\langle T(y_i), x_{i+1} - x^*\rangle \geqslant \langle T(y_i), x_{i+1} - y_i\rangle$$

由于 $x_{i+1} \in K_i$, 根据引理 1.3(i) 和式 (5.17) 有

$$\langle x_{i+1} - y_i, (x_i - \eta_i T(x_i)) - y_i\rangle \leqslant 0$$

因此

$$\begin{aligned}\langle x_{i+1}-y_i,(x_i-\eta_i T(y_i))-y_i\rangle &= \langle x_{i+1}-y_i, x_i-\eta_i T(x_i)-y_i\rangle\\ &\quad +\eta_i\langle x_{i+1}-y_i, T(x_i)-T(y_i)\rangle\\ &\leqslant \eta_i\langle x_{i+1}-y_i, T(x_i)-T(y_i)\rangle\end{aligned}$$

余下证明过程类似于引理 5.3，只需将 $\mathcal{P}_{K_i}$ 代替 $\mathcal{P}_{H_i\cap K_{i+1}}$ 即可，故略去细节.

定理 5.7 假设对所有的 $i\geqslant 1$ 有 $S_1\subseteq K_i\subseteq K$, $K_i\overset{\text{epi}}{\to}K$, 且假定 (5.2) 成立. 如果映射 $T:K\to\mathbb{R}^n$ 在 K 上连续, 则算法 5.2 产生的序列 $\{x_i\}$ 收敛到问题 (5.1) 的一个解 $\overline{x}$.

该定理的证明类似于定理 5.4, 故略去.

如果对所有的 i 有 $K_i\equiv K$, 则上述两个算法变为求解变分不等式问题 (5.1) 的如下算法.

算法 5.3 选取 $x_0\in K$ 和参数 $\theta,\sigma\in(0,1)$. 令 $i=1$.

步骤 1. 设 k_i 是满足下面不等式的最小正整数 k:

$$\theta^k\|T(x_i)-T(\mathcal{P}_K(x_i-\theta^k T(x_i)))\|\leqslant\sigma\|r_{\theta^k}(x_i)\|$$

令 $\eta_i=\theta^{k_i}$ 和

$$y_i=\mathcal{P}_K(x_i-\eta_i T(x_i))$$

如果 $r_{\eta_i}(x_i)=0$, 停止.

步骤 2. 计算

$$x_{i+1}:=\mathcal{P}_K(x_i-\eta_i T(y_i))$$

令 $i:=i+1$, 并回到步骤 1.

类似于定理 5.4 或定理 5.7 的证明, 我们有下面的收敛结果.

定理 5.8 如果 $T:K\to\mathbb{R}^n$ 在 K 上连续, 且假定 (5.2) 成立, 则算法 5.3 产生的序列 $\{x_i\}$ 收敛到问题 (5.1) 的一个解 $\overline{x}$.

5.2 集值变分不等式

我们考虑如下集值变分不等式问题: 求 $x^*\in K$ 和 $w^*\in T(x^*)$ 使得

$$\langle w^*,y-x^*\rangle\geqslant 0,\quad \forall y\in K \tag{5.18}$$

其中, K 是 $\mathbb{R}^n$ 的非空闭凸子集, $T: K \to 2^{\mathbb{R}^n}$ 是一个集值映射.

设 S_2 为变分不等式问题 (5.18) 的解集. 在本节中, 我们假定集合 $S_2 \neq \varnothing$, 映射 T 是连续的且具有非空紧凸值, 并满足下面的性质:

$$\langle w, y-x\rangle \geqslant 0, \quad \forall y \in K, \forall w \in T(y), \forall x \in S_2 \tag{5.19}$$

如果映射 T 是伪单调的, 则性质 (5.19) 成立.

对任意的 $x \in \mathbb{R}^n, w \in T(x)$ 和 $\mu > 0$, 记

$$r_\mu^i(x,w) := x - \mathcal{P}_{K_i}(x-\mu w)$$

引理 5.9　对任意的 $x \in \mathbb{R}^n, w \in T(x)$ 和 $\mu > 0$, 有

$$\min\{1,\mu\}\|r_1^i(x,w)\| \leqslant \|r_\mu^i(x,w)\| \leqslant \max\{1,\mu\}\|r_1^i(x,w)\|$$

该引理的证明类似于引理 1.24.

算法 5.4　设 $\{K_i\}$ 是 $\text{NCCS}(\mathbb{R}^n)$ 中的集合序列, 并满足 $K_i \stackrel{\text{epi}}{\to} K$. 选取 $x_1 \in K_1$ 和参数 $\theta, \sigma \in (0,1)$. 令 $i=1$.

步骤 1. 选取 $u_i \in T(x_i)$, 并令 k_i 是满足下面不等式的最小非负整数 k:

$$v_i \in T(\mathcal{P}_{K_i}(x_i - \theta^k u_i)) \tag{5.20}$$

$$\theta^k\|u_i - v_i\| \leqslant \sigma\|r_{\theta^k}^i(x_i,u_i)\| \tag{5.21}$$

令 $\eta_i = \theta^{k_i}$ 和

$$y_i = \mathcal{P}_{K_i}(x_i - \eta_i u_i)$$

步骤 2. 计算 $x_{i+1} := \mathcal{P}_{H_i \cap K_{i+1}}(x_i - \eta_i v_i)$, 其中

$$H_i := \{x \in \mathbb{R}^n : \langle x_i - \eta_i u_i - y_i, x - y_i\rangle \leqslant 0\}$$

令 $i := i+1$, 并回到步骤 1.

下面的命题表明算法 5.4 是可行的.

命题 5.10　假设对所有的 $i \geqslant 1$ 有 $K_i \subseteq K$, 则存在非负整数 k_i 满足式 (5.20) 和式 (5.21).

证明　如果对某个 $n_0 \geqslant 0$ 有 $r_{\theta^{n_0}}^i(x_i,u_i)=0$, 则只需取 $k_i = n_0$ 和 $v_i = u_i$ 即可.

先假设对某个 $n_1 \geqslant 0$, $r_{\theta^{n_1}}^i(x_i,u_i) \neq 0$. 用反证法. 假设对所有的 k 和所有的 $v \in T(\mathcal{P}_{K_i}(x_i - \theta^k u_i))$, 有

$$\theta^k\|u_i - v\| > \sigma\|r_{\theta^k}^i(x_i,u_i)\|$$

即

$$\begin{aligned}\|u_i - v\| &> \frac{\sigma}{\theta^k}\|r^i_{\theta^k}(x_i, u_i)\| \\ &\geqslant \frac{\sigma}{\theta^k}\min\{1, \theta^k\}\|r^i_1(x_i, u_i)\| \\ &= \sigma\|r^i_1(x_i, u_i)\|\end{aligned}$$

其中, 第二个不等式是根据引理 5.9, 而等式是根据 $\theta \in (0,1)$ 和 $k \geqslant 0$. 由于 $\mathcal{P}_{K_i}(\cdot)$ 连续且 $x_i \in K_i$, 故 $\mathcal{P}_{K_i}(x_i - \theta^k u_i) \to x_i$ $(k \to \infty)$. 由于 $u_i \in T(x_i)$ 和 $\mathcal{P}_{K_i}(x_i-\theta^k u_i) \to x_i$ $(k \to \infty)$, 所以 T 的下半连续性蕴含存在 $v_k \in T(\mathcal{P}_{K_i}(x_i-\theta^k u_i))$ 使得 $v_k \to u_i (k \to \infty)$. 因此

$$\|u_i - v_k\| > \sigma\|r^i_1(x_i, u_i)\|, \quad \forall k \tag{5.22}$$

由于 $r^i_{\theta^{n_1}}(x_i, u_i) \neq 0$, 故根据引理 5.9 可得

$$0 < \|r^i_{\theta^{n_1}}(x_i, u_i)\| \leqslant \max\{1, \theta^{n_1}\}\|r^i_1(x_i, u_i)\| = \|r^i_1(x_i, u_i)\|$$

其中, 最后一个等式是根据 $\theta^{n_1} \leqslant 1$. 在式 (5.22) 中令 $k \to \infty$ 有

$$0 = \|u_i - u_i\| \geqslant \sigma\|r^i_1(x_i, u_i)\| > 0$$

矛盾. 证毕.

类似于引理 5.3 的证明, 我们有下面的结果.

引理 5.11 假设对所有的 $i \geqslant 1$ 有 $S_2 \subseteq K_i \subseteq K$, $K_i \xrightarrow{\text{epi}} K$, 且假定 (5.19) 成立. 设 $\{x_i\}$ 是算法 5.4 产生的序列, $x^* \in S_2$, 则

$$\|x_{i+1} - x^*\|^2 \leqslant \|x_i - x^*\|^2 - (1-\sigma^2)\eta_i^2\|r^i_1(x_i, u_i)\|^2 \tag{5.23}$$

定理 5.12 假设对所有的 $i \geqslant 1$ 有 $S_2 \subseteq K_i \subseteq K$, $K_i \xrightarrow{\text{epi}} K$, 且假定 (5.19) 成立. 如果映射 $T: K \to 2^{\mathbb{R}^n}$ 是连续的且具有非空紧凸值, 则算法 5.4 产生的序列 $\{x_i\}$ 收敛到问题 (5.18) 的一个解 $\overline{x}$.

证明 设 $x^* \in S_2$. 由于 $0<\sigma<1$, 故 $(1-\sigma^2) \in (0,1)$. 因此, 由引理 5.11 可得

$$0 \leqslant (1-\sigma^2)\eta_i^2\|r^i_1(x_i, u_i)\|^2 \leqslant \|x_i - x^*\|^2 - \|x_{i+1} - x^*\|^2 \tag{5.24}$$

所以序列 $\{\|x_{i+1} - x^*\|^2\}$ 是非递增的, 从而收敛. 因此, 序列 $\{x_i\}$ 有界. 在式 (5.24) 中令 $i \to \infty$ 有

$$\lim_{i\to\infty} \eta_i\|r_1(x_i, u_i)\| = 0 \tag{5.25}$$

序列 $\{x_i\}$ 的有界性蕴含存在子序列 $\{x_{i_j}\}$ 使得 $x_{i_j} \to \overline{x}(j \to \infty)$.

如果 $\overline{x}$ 是问题 (5.18) 的一个解, 接下来证明 $x_i \to \overline{x}(i \to \infty)$. 在前面证明中用 $\overline{x}$ 代替 x^* 可得, 序列 $\{\|x_i - \overline{x}\|\}$ 是非递增的, 进而收敛. 由于 $\overline{x}$ 是序列 $\{x_i\}$ 的一个聚点, 故 $\{\|x_i - \overline{x}\|\}$ 的某个子序列收敛到 0. 这就证明了整个序列 $\{\|x_i - \overline{x}\|\}$ 收敛到 0, 因此 $\lim\limits_{i\to\infty} x_i = \overline{x}$.

现假设 $\overline{x}$ 不是问题 (5.18) 的解. 首先证明算法 5.4 中的 k_i 不可能趋近于 ∞. 由于映射 T 是连续的且具有紧值, 故由引理 1.26 可知, $\{T(x_i) : i \in N\}$ 是一个有界集, 从而序列 $\{u_i\}$ 有界. 因此, $\{u_i\}$ 存在子序列 $\{u_{i_j}\}$ 使得 $u_{i_j} \to \overline{u}(j \to \infty)$. 由于映射 T 是上半连续的且具有紧值, 故由引理 1.27 可知, 映射 T 是闭的, 从而 $\overline{u} \in T(\overline{x})$. 根据 k_i 的定义有

$$\theta^{k_i-1}\|u_i - v\| > \sigma\|r^i_{\theta^{k_i-1}}(x_i, u_i)\|, \quad \forall v \in T(\mathcal{P}_{K_i}(x_i - \theta^{k_i-1}u_i))$$

即

$$\begin{aligned}\|u_i - v\| &> \frac{\sigma}{\theta^{k_i-1}}\|r^i_{\theta^{k_i-1}}(x_i, u_i)\| \\ &\geqslant \frac{\sigma}{\theta^{k_i-1}}\min\{1, \theta^{k_i-1}\}\|r^i_1(x_i, u_i)\| \\ &= \sigma\|r^i_1(x_i, u_i)\|, \quad \forall v \in T(\mathcal{P}_{K_i}(x_i - \theta^{k_i-1}u_i)), \forall k_i \geqslant 1\end{aligned}$$

其中, 第二个不等式是根据引理 5.9, 而等式是根据 $\theta \in (0, 1)$.

如果 $k_{i_j} \to \infty$, 由于 $\overline{x} \in K$, 则根据引理 1.32 有 $\mathcal{P}_{K_{i_j}}(x_{i_j} - \theta^{k_{i_j}-1}u_{i_j}) \to \overline{x}$. 因此，映射 T 的下半连续性蕴含存在 $\overline{u}_{i_j} \in T(\mathcal{P}_{K_{i_j}}(x_{i_j} - \theta^{k_{i_j}-1}u_{i_j}))$ 使得 $\overline{u}_{i_j} \to \overline{u}(j \to \infty)$. 所以

$$\|u_{i_j} - \overline{u}_{i_j}\| > \sigma\|r^i_1(x_{i_j}, u_{i_j})\|$$

令 $j \to \infty$, 根据引理 1.32 有

$$0 \geqslant \sigma\|r_1(\overline{x}, \overline{u})\|^2 > 0$$

矛盾. 因此, 序列 $\{k_i\}$ 有界, 从而 $\{\eta_i\}$ 有界.

根据 $\{\eta_i\}$ 的有界性和式 (5.25) 有 $\lim\limits_{i\to\infty}\|r^i_1(x_i, u_i)\| = 0$. 由于序列 $\{x_i\}$ 和 $\{u_i\}$ 均有界, 故从引理 1.32 可知，序列 $\{(x_i, u_i)\}$ 存在聚点 $(\overline{x}, \overline{u})$ 使得 $r_1(\overline{x}, \overline{u}) = 0$. 这蕴含了 $\overline{x}$ 是变分不等式问题 (5.18) 的一个解. 类似于前面的证明有 $\lim\limits_{i\to\infty} x_i = \overline{x}$.

算法 5.5 设 $\{K_i\}$ 是 NCCS$(\mathbb{R}^n)$ 中的集合序列, 且满足 $K_i \overset{\text{epi}}{\to} K$. 选取 $x_1 \in K_0$ 和参数 $\theta, \sigma \in (0, 1)$. 令 $i = 1$.

步骤 1. 选取 $u_i \in T(x_i)$, 并设 k_i 是满足下面不等式的最小正整数:

$$v_i \in T(\mathcal{P}_{K_i}(x_i - \theta^{k_i} u_i)) \tag{5.26}$$

$$\theta^{k_i} \|u_i - v_i\| \leqslant \sigma \|r^i_{\theta^{k_i}}(x_i, u_i)\| \tag{5.27}$$

令 $\eta_i = \theta^{k_i}$ 和

$$y_i = \mathcal{P}_{K_i}(x_i - \eta_i u_i)$$

步骤 2. 计算

$$x_{i+1} := \mathcal{P}_{K_i}(x_i - \eta_i v_i) \tag{5.28}$$

令 $i := i + 1$, 并回到步骤 1.

首先证明算法 5.5 是可行的.

命题 5.13 假设对所有的 $i \geqslant 1$ 有 $K_i \subseteq K$, 则存在非负整数 k_i 满足式 (5.26) 和式 (5.27).

这个命题的证明类似于命题 5.10.

引理 5.14 假设对所有的 $i \geqslant 1$ 有 $S_2 \subseteq K_i \subseteq K$, $K_i \xrightarrow{\text{epi}} K$, 且假定 (5.19) 成立. 设 $\{x_i\}$ 是算法 5.5 产生的序列, $x^* \in S_2$. 则

$$\|x_{i+1} - x^*\|^2 \leqslant \|x_i - x^*\|^2 - (1 - \sigma^2)\eta_i^2 \|r^i_1(x_i, u_i)\|^2$$

证明 由于 $v_i \in T(y_i)$ 和 $x^* \in S_2$, 故由假定 (5.19) 可知

$$\langle v_i, y_i - x^* \rangle \geqslant 0$$

因此

$$\langle v_i, x_{i+1} - x^* \rangle \geqslant \langle v_i, x_{i+1} - y_i \rangle \tag{5.29}$$

由于 $y_i \in K_i$, 故根据式 (5.29) 和引理 1.3(i) 可得

$$\langle x_{i+1} - y_i, (x_i - \eta_i u_i) - y_i \rangle \leqslant 0$$

所以

$$\begin{aligned} \langle x_{i+1} - y_i, (x_i - \eta_i v_i) - y_i \rangle &= \langle x_{i+1} - y_i, x_i - \eta_i u_i - y_i \rangle \\ &\quad + \eta_i \langle x_{i+1} - y_i, u_i - v_i \rangle \\ &\leqslant \eta_i \langle x_{i+1} - y_i, u_i - v_i \rangle \end{aligned} \tag{5.30}$$

余下的证明类似于引理 5.11, 只需将 $\mathcal{P}_{K_i}$ 代替 $\mathcal{P}_{H_i \cap K_{i+1}}$ 即可, 故略去.

接下来我们给出算法 5.5 的全局收敛性结果.

定理 5.15 假设对所有的 $i \geqslant 1$ 有 $S_2 \subseteq K_i \subseteq K$, $K_i \xrightarrow{\text{epi}} K$, 且假定 (5.19) 成立. 如果映射 $T: K \to 2^{\mathbb{R}^n}$ 在 K 上是连续的且具有非空紧凸值, 则算法 5.5 产生的序列 $\{x_i\}$ 收敛到变分不等式问题 (5.18) 的一个解 $\overline{x}$.

证明 我们只需就 $\overline{x}$ 不是问题 (5.18) 的解这种情形进行证明. 余下的证明过程类似于定理 5.12.

假设 $\overline{x}$ 不是问题 (5.18) 的解. 首先证明算法 5.5 中的 k_i 不可能趋近于 ∞. 由于映射 T 连续且具有紧值, 故根据引理 1.26 可知, $\{T(x_i): i \in N\}$ 是有界集, 从而序列 $\{u_i\}$ 有界, 所以存在子序列 $\{u_{i_j}\}$ 使得 $u_{i_j} \to \overline{u}$. 由于映射 T 是上半连续的且具有紧值, 故根据引理 1.27 可知，T 是闭的, 从而 $\overline{u} \in T(\overline{x})$. 根据 k_i 的定义有

$$\theta^{k_i-1}\|u_i - v\| > \sigma\|r^i_{\theta^{k_i-1}}(x_i, u_i)\|, \quad \forall v \in T(\mathcal{P}_{K_i}(x_i - \theta^{k_i-1}u_i))$$

即

$$\begin{aligned}\|u_i - v\| &> \frac{\sigma}{\theta^{k_i-1}}\|r^i_{\theta^{k_i-1}}(x_i, u_i)\| \\ &\geqslant \frac{\sigma}{\theta^{k_i-1}}\min\{1, \theta^{k_i-1}\}\|r^i_1(x_i, u_i)\| \\ &= \sigma\|r^i_1(x_i, u_i)\|, \quad \forall v \in T(\mathcal{P}_{K_i}(x_i - \theta^{k_i-1}u_i)), \quad \forall k_i \geqslant 1\end{aligned}$$

其中, 第二个不等式是根据引理 5.9, 而等式是根据 $\theta \in (0, 1)$.

如果 $k_{i_j} \to \infty$, 由于 $\overline{x} \in K$, 故根据引理1.32可得 $\mathcal{P}_{K_{i_j}}(x_{i_j} - \theta^{k_{i_j}-1}u_{i_j}) \to \overline{x}$. 由于映射 T 是下半连续的, 故存在 $\overline{u}_{i_j} \in T(\mathcal{P}_{K_{i_j}}(x_{i_j} - \theta^{k_{i_j}-1}u_{i_j}))$ 使得 $\overline{u}_{i_j} \to \overline{u}$. 所以

$$\|u_{i_j} - \overline{u}_{i_j}\| > \sigma\|r^i_1(x_{i_j}, u_{i_j})\| \tag{5.31}$$

令 $j \to \infty$, 则根据引理 1.32 有

$$0 \geqslant \sigma\|r_1(\overline{x}, \overline{\xi})\|^2 > 0$$

矛盾. 所以 $\{k_i\}$ 有界，从而 $\{\eta_i\}$ 有界. 因此, 由式 (5.24) 可得

$$\lim_{i\to\infty}\|r^i_1(x_i, \xi_i)\| = 0$$

由于序列 $\{x_i\}$ 和 $\{u_i\}$ 均有界, 故根据引理 1.32 可知，序列 $\{(x_i, u_i)\}$ 存在聚点 $(\overline{x}, \overline{u})$ 使得 $r_1(\overline{x}, \overline{u}) = 0$. 这蕴含了 $\overline{x}$ 是变分不等式问题 (1.26) 的一个解. 类似于定理 5.12 的证明可知 $\lim\limits_{i\to\infty} x_i = \overline{x}$.

5.3 广义变分不等式

设 K 是 $\mathbb{R}^n$ 的非空闭凸子集, $T,h:K\to\mathbb{R}^n$ 均为单值映射. 我们考虑如下广义变分不等式问题: 求 $x^*\in K, h(x^*)\in K$ 使得

$$\langle T(x^*), h(y)-h(x^*)\rangle \geqslant 0,\quad \forall h(y)\in K \tag{5.32}$$

对任意的 $x\in K$ 和 $\mu>0$, 记

$$R_\mu^i(x) := h(x)-\mathcal{P}_{K_i}(h(x)-\mu T(x))$$
$$R_\mu(x) := h(x)-\mathcal{P}_K(h(x)-\mu T(x))$$

引理 5.16 $x\in K$ 是变分不等式问题 (5.32) 的解当且仅当

$$R_\mu(x) := h(x)-\mathcal{P}_K(h(x)-\mu T(x))=0$$

引理 5.17 对任意的 $x\in K$ 和 $\mu>0$, 有

$$\min\{1,\mu\}\|R_1^i(x)\| \leqslant \|R_\mu^i(x)\| \leqslant \max\{1,\mu\}\|R_1^i(x)\|$$

该结果的证明类似于引理 1.24.

算法 5.6 设 $\{K_i\}$ 是 NCCS($\mathbb{R}^n$) 中的集合序列, 且满足 $K_i \overset{\text{epi}}{\to} K$. 选取 $x_1\in K_1$ 和参数 $\theta,\sigma\in(0,1)$. 令 $i=1$.

步骤 1. 设 k_i 是满足下面不等式的最小正整数 k:

$$\theta^k\|T(h(x_i))-T(\mathcal{P}_{K_i}(h(x_i)-\theta^kT(x_i)))\| \leqslant \sigma\|R_{\theta^k}^i(x_i)\| \tag{5.33}$$

令 $\eta_i=\theta^{k_i}$ 和

$$y_i=\mathcal{P}_{K_i}(h(x_i)-\eta_iT(x_i))$$

步骤 2. 求 x_{i+1} 使得 $h(x_{i+1}) := \mathcal{P}_{H_i\cap K_{i+1}}(h(x_i)-\eta_iT(y_i))$, 其中

$$H_i := \{x\in\mathbb{R}^n : \langle h(x_i)-\eta_iT(h(x_i))-h(y_i), x-h(y_i)\rangle \leqslant 0\}$$

令 $i:=i+1$, 并回到步骤 1.

记 S_3 为变分不等式问题 (5.32) 的解集. 在本节中, 我们假定 $S_3\neq\varnothing$ 且 T 在 K 上关于集合 S_3 是 h-伪单调的, 即

$$\langle T(y), h(y)-h(x)\rangle \geqslant 0,\quad \forall h(y)\in K, \forall x\in S_3 \tag{5.34}$$

如果 T 在 K 上是 h-伪单调的, 则性质 (5.34) 成立.

首先我们证明算法 5.6 是可行的.

命题 5.18　假设对所有的 $i \geqslant 0$ 有 $K_i \subseteq K$, 则存在非负整数 k_i 满足式 (5.33).

证明　如果对某个 $n_0 \geqslant 0$ 有 $R^i_{\theta^{n_0}}(x_i) = 0$, 只需取 $k_i = n_0$ 即可.

现假定对某个 $n_1 \geqslant 0$ 有 $R^i_{\theta^{n_1}}(x_i) \neq 0$. 假设对所有的 k 和 $y_k = \mathcal{P}_{K_i}(h(x_i) - \theta^k T(x_i))$, 有

$$\theta^k \|T(h(x_i)) - T(y_k)\| > \sigma \|R^i_{\theta^k}(x_i)\|$$

即

$$\begin{aligned}\|T(h(x_i)) - T(y_k)\| &> \frac{\sigma}{\theta^k}\|R^i_{\theta^k}(x_i)\| \\ &\geqslant \frac{\sigma}{\theta^k}\min\{1, \theta^k\}\|R^i_1(x_i)\| \\ &= \sigma\|R^i_1(x_i)\| \end{aligned} \tag{5.35}$$

其中, 第二个不等式是根据引理 5.17, 而等式是根据 $\theta \in (0,1)$ 和 $k \geqslant 0$. 由于 $h(x_i) \in K_i$, 且 $\mathcal{P}_{K_i}(\cdot)$ 和 h 均连续, 故 $y_k = \mathcal{P}_{K_i}(h(x_i) - \theta^k T(x_i)) \to h(x_i)$ $(k \to \infty)$. 由于 $R_{\theta^{n_1}}(x_i) \neq 0$, 故根据引理 5.17 可知

$$0 < \|R^i_{\theta^{n_1}}(x_i)\| \leqslant \max\{1, \theta^{n_1}\}\|R^i_1(x_i)\| = \|R^i_1(x_i)\|$$

其中, 最后一个等式是根据 $\theta^{n_1} \leqslant 1$. 由于映射 T 连续, 在式 (5.35) 中令 $k \to \infty$, 有

$$0 = \|T(h(x_i)) - T(h(x_i))\| \geqslant \sigma\|R^i_1(x_i)\| > 0$$

矛盾. 证毕.

定理 5.19　假设对所有的 $i \geqslant 1$ 有 $S_3 \subseteq K_i \subseteq K$, $K_i \overset{\text{epi}}{\to} K$, 且假定 (5.34) 成立. 设 $\{x_i\}$ 是算法 5.6 产生的序列,$x^* \in S_3$, 则

$$\|h(x_{i+1}) - h(x^*)\|^2 \leqslant \|h(x_i) - h(x^*)\|^2 - (1-\sigma^2)\eta_i^2\|R^i_1(x_i)\|^2 \tag{5.36}$$

证明　由于 $x^* \in S_3$, 故从假定 (5.34) 可知

$$\langle T(y_i), h(y_i) - h(x^*)\rangle \geqslant 0$$

因此

$$\langle T(y_i), h(x_{i+1}) - h(x^*)\rangle \geqslant \langle T(y_i), h(x_{i+1}) - h(y_i)\rangle \tag{5.37}$$

由算法 5.6 的步骤 2 可得

$$\langle h(x_{i+1}) - h(y_i), h(x_i) - \eta_i T(h(x_i)) - h(y_i)\rangle \leqslant 0$$

所以

$$
\begin{aligned}
&\langle h(x_{i+1})-h(y_i),h(x_i)-\eta_iT(y_i))-h(y_i)\rangle\\
=&\langle h(x_{i+1})-h(y_i),h(x_i)-\eta_iT(h(x_i))-h(y_i)\rangle\\
&+\eta_i\langle h(x_{i+1})-h(y_i),T(h(x_i))-T(y_i)\rangle\\
\leqslant&\eta_i\langle h(x_{i+1})-h(y_i),T(h(x_i))-T(y_i)\rangle
\end{aligned}
\tag{5.38}
$$

记 $z_i=h(x_i)-\eta_iT(y_i)$, 则有

$$
\begin{aligned}
&\|h(x_{i+1})-h(x^*)\|^2\\
=&\|\mathcal{P}_{H_i\cap K_{i+1}}(z_i)-h(x^*)\|^2\\
=&\langle\mathcal{P}_{H_i\cap K_{i+1}}(z_i)-z_i+z_i-h(x^*),\mathcal{P}_{H_i\cap K_{i+1}}(z_i)-z_i+z_i-h(x^*)\rangle\\
=&\|z_i-h(x^*)\|^2+\|z_i-\mathcal{P}_{H_i\cap K_{i+1}}(z_i)\|^2\\
&+2\langle\mathcal{P}_{H_i\cap K_{i+1}}(z_i)-z_i,z_i-h(x^*)\rangle
\end{aligned}
$$

由于

$$
\begin{aligned}
&2\|z_i-\mathcal{P}_{H_i\cap K_{i+1}}(z_i)\|^2+2\langle\mathcal{P}_{H_i\cap K_{i+1}}(z_i)-z_i,z_i-h(x^*)\rangle\\
=&2\langle z_i-\mathcal{P}_{H_i\cap K_{i+1}}(z_i),h(x^*)-\mathcal{P}_{H_i\cap K_{i+1}}(z_i)\rangle\leqslant 0
\end{aligned}
$$

故

$$
\begin{aligned}
&\|z_i-\mathcal{P}_{H_i\cap K_{i+1}}(z_i)\|^2+2\langle\mathcal{P}_{H_i\cap K_{i+1}}(z_i)-z_i,z_i-h(x^*)\rangle\\
\leqslant&-\|z_i-\mathcal{P}_{H_i\cap K_{i+1}}(z_i)\|^2
\end{aligned}
$$

所以

$$
\begin{aligned}
&\|h(x_{i+1})-h(x^*)\|^2\\
\leqslant&\|z_i-h(x^*)\|^2-\|z_i-\mathcal{P}_{H_i\cap K_{i+1}}(z_i)\|^2\\
=&\|(h(x_i)-\eta_iT(y_i))-h(x^*)\|^2-\|(h(x_i)-\eta_iT(y_i))-\mathcal{P}_{H_i\cap K_{i+1}}(z_i)\|^2\\
=&\|h(x_i)-h(x^*)\|^2-\|h(x_i)-h(x_{i+1})\|^2+2\eta_i\langle h(x^*)-h(x_{i+1}),T(y_i)\rangle\\
\leqslant&\|h(x_i)-h(x^*)\|^2-\|h(x_i)-h(x_{i+1})\|^2+2\eta_i\langle h(y_i)-h(x_{i+1}),T(y_i)\rangle
\end{aligned}
$$

其中, 最后一个不等式是根据式 (5.37). 因此

$$
\begin{aligned}
&\|h(x_{i+1})-h(x^*)\|^2\\
\leqslant&\|h(x_i)-h(x^*)\|^2-\|h(x_i)-h(x_{i+1})\|^2+2\eta_i\langle h(y_i)-h(x_{i+1}),T(y_i)\rangle\\
=&\|h(x_i)-h(x^*)\|^2-\langle h(x_i)-h(y_i)+h(y_i)-h(x_{i+1}),h(x_i)-h(y_i)\\
&+h(y_i)-h(x_{i+1})\rangle+2\eta_i\langle h(y_i)-h(x_{i+1}),T(y_i)\rangle\\
=&\|h(x_i)-h(x^*)\|^2-\|h(x_i)-h(y_i)\|^2-\|h(y_i)-h(x_{i+1})\|^2\\
&+2\langle h(x_{i+1})-h(y_i),h(x_i)-\eta_iT(y_i)-h(y_i)\rangle\\
\leqslant&\|h(x_i)-h(x^*)\|^2-\|h(x_i)-h(y_i)\|^2-\|h(y_i)-h(x_{i+1})\|^2\\
&+2\eta_i\langle h(x_{i+1})-h(y_i),T(h(x_i))-T(y_i)\rangle\\
\leqslant&\|h(x_i)-h(x^*)\|^2-\|h(x_i)-h(y_i)\|^2-\|h(y_i)-h(x_{i+1})\|^2\\
&+2\sigma\|h(x_{i+1})-h(y_i)\|\|h(x_i)-h(y_i)\|
\end{aligned}
\tag{5.39}
$$

其中, 第二个不等式是根据式 (5.38), 而最后一个不等式是根据 Cauchy-Schwarz 不等式和式 (5.33).

由于

$$
\begin{aligned}
0\leqslant&(\sigma\|h(x_i)-h(y_i)\|-\|h(x_{i+1})-h(y_i)\|)^2\\
=&\sigma^2\|h(x_i)-h(y_i)\|^2-2\sigma\|h(x_{i+1})-h(y_i)\|\|h(x_i)-h(y_i)\|\\
&+\|h(y_i)-h(x_{i+1})\|^2
\end{aligned}
$$

故

$$
\begin{aligned}
&2\sigma\|h(x_{i+1})-h(y_i)\|\|h(x_i)-h(y_i)\|\\
\leqslant&\sigma^2\|h(x_i)-h(y_i)\|^2+\|h(y_i)-h(x_{i+1})\|^2
\end{aligned}
\tag{5.40}
$$

结合式 (5.39) 和式 (5.40), 有

$$
\begin{aligned}
\|h(x_{i+1})-h(x^*)\|^2\leqslant&\|h(x_i)-h(x^*)\|^2-(1-\sigma^2)\|h(x_i)-h(y_i)\|^2\\
=&\|h(x_i)-h(x^*)\|^2-(1-\sigma^2)\|R^i_{\eta_i}(x_i)\|^2
\end{aligned}
\tag{5.41}
$$

根据引理 5.17, 有

$$
\|R^i_{\eta_i}(x_i)\|\geqslant\min\{1,\eta_i\}\|R^i_1(x_i)\|=\eta_i\|R^i_1(x_i)\|
\tag{5.42}
$$

所以根据式 (5.41) 和式 (5.42) 可知式 (5.36) 成立.

定理 5.20 假设对所有 $i \geqslant 1$ 有 $S_3 \subseteq K_i \subseteq K$,$K_i \overset{\text{epi}}{\to} K$, 且假定 (5.34) 成立. 如果映射 $T, h: K \to \mathbb{R}^n$ 均在 K 上连续, 映射 h 关于变分不等式问题 (5.32) 的某个解是 α-强单调的且 $h^{-1}: \mathbb{R}^n \to 2^{\mathbb{R}^n}$ 在 K 上局部有界, 则算法 5.6 产生序列 $\{x_i\}$ 收敛到变分不等式问题 (5.32) 的一个解 $\overline{x}$.

证明 设 $x^* \in S_3$. 由于 $0 < \sigma < 1$, 故 $(1-\sigma^2) \in (0,1)$. 根据定理 5.19 有

$$(1-\sigma^2)\eta_i^2\|R_1^i(x_i)\|^2 \leqslant \|h(x_i) - h(x^*)\|^2 - \|h(x_{i+1}) - h(x^*)\|^2$$

因此, 序列 $\{\|h(x_{i+1}) - h(x^*)\|^2\}$ 是非递增的, 从而收敛. 所以序列 $\{h(x_i)\}$ 有界且

$$0 \leqslant (1-\sigma^2)\eta_i^2\|R_1^i(x_i)\|^2 \to 0, \quad i \to \infty$$

这蕴含

$$\lim_{i\to\infty} \eta_i\|R_1^i(x_i)\| = 0 \tag{5.43}$$

我们考虑两种可能的情况.

情形 1 假设 $\limsup\limits_{i\to\infty} \eta_i > 0$. 根据式 (5.43) 有 $\liminf\limits_{i\to\infty}\|R_1^i(x_i)\| = 0$. 由于 h^{-1} 局部有界, 故序列 $\{x_i\}$ 有界. 由于映射 T 和 h 均连续, 故根据引理 1.32 可知, 序列 $\{x_i\}$ 存在聚点 $\overline{x}$ 满足 $R_1(\overline{x}) = 0$, 即 $\overline{x}$ 是变分不等式问题 (5.32) 的一个解. 接下来证明 $x_i \to \overline{x}$. 在前面的证明中用 $\overline{x}$ 代替 x^* 可得, 序列 $\{\|h(x_i) - h(\overline{x})\|\}$ 是非递增的, 从而收敛. 由于 $\overline{x}$ 是序列 $\{x_i\}$ 的一个聚点, h 的连续性蕴含 $\{\|h(x_i) - h(\overline{x})\|\}$ 的某个子序列收敛到 0. 这证明了整个序列 $\{\|h(x_i) - h(\overline{x})\|\}$ 收敛到 0. 由于 h 关于 $\overline{x} \in S$ 是强单调的, 所以

$$0 \leqslant \alpha\|x_i - x^*\| \leqslant \|h(x_i) - h(x^*)\| \to 0, \quad i \to \infty$$

这证明了整个序列 $\{\|x_i - x^*\|\}$ 收敛到 0, 从而 $\lim\limits_{i\to\infty} x_i = \overline{x}$.

情形 2 假设 $\lim\limits_{i\to\infty} \eta_i = 0$. 根据 η_i 的定义可知, 对所有的 $k_i \geqslant 1$, 有

$$\begin{aligned}\|T(h(x_i)) - T(\mathcal{P}_{K_i}(h(x_i) - \theta^{k_i-1}T(x_i)))\| &> \frac{\sigma}{\theta^{k_i-1}}\|R^i_{\theta^{k_i-1}}(x_i)\| \\ &\geqslant \sigma\|R_1^i(x_i)\|\end{aligned} \tag{5.44}$$

其中, 第二个不等式是根据引理 5.17. 设 $\overline{x}$ 是序列 $\{x_i\}$ 的任一聚点, 且子列 $\{x_{i_j}\}$ 使得 $x_{i_j} \to \overline{x}$. 故从式 (5.44) 可得

$$\|T(h(x_{i_j})) - T(\mathcal{P}_{K_{i_j}}(h(x_{i_j}) - \theta^{-1}\eta_{i_j}T(x_{i_j})))\| > \sigma\|R_1^{i_j}(x_{i_j})\|$$

令 $j \to \infty$, 根据引理 1.32 以及映射 T 和 h 的连续性可知

$$0 = \|T(h(\overline{x})) - T(h(\overline{x}))\| \geqslant \sigma \|R_1(\overline{x})\|$$

所以 $R_1(\overline{x}) = 0$. 这蕴含 $\overline{x}$ 是变分不等式问题 (5.32) 的解. 类似于前面的证明可得 $\lim\limits_{i\to\infty} x_i = \overline{x}$.

算法 5.7　设 $\{K_i\}$ 是 NCCS($\mathbb{R}^n$) 中的集合序列且满足 $K_i \overset{\text{epi}}{\to} K$. 选取 $x_1 \in K_1$ 和参数 $\theta, \sigma \in (0,1)$. 令 $i = 1$.

步骤 1. 设 k_i 是满足下面不等式的最小非负整数 k:

$$\theta^k \|T(h(x_i)) - T(\mathcal{P}_{K_i}(h(x_i) - \theta^k T(x_i)))\| \leqslant \sigma \|R^i_{\theta^k}(x_i)\|$$

令 $\eta_i = \theta^{k_i}$ 和

$$y_i = \mathcal{P}_{K_i}(h(x_i) - \eta_i T(x_i))$$

步骤 2. 求 x_{i+1} 使得 $h(x_{i+1}) := \mathcal{P}_{K_i}(h(x_i) - \eta_i T(y_i))$.

令 $i := i + 1$, 并回到步骤 1.

注解 5.2　算法 5.7 的收敛性证明类似于算法 5.6, 故略去.

第 6 章　Hadamard 流形上的变分不等式

在本章中, 我们介绍并研究了 Hadamard 流形上伪凸意义下的向量变分不等式. 首先, 利用黎曼流形上的广义次微分, 我们提出了非光滑函数的伪凸性及伪单调集值向量场的概念; 接着讨论了它们的性质, 得到了伪凸性等价于伪单调性这一重要结论; 最后, 我们引入了 Minty 型和 Stampacchia 型 (弱) 向量变分不等式, 在伪凸性或伪单调性的假设条件下, 我们证明了向量变分不等式和不可微非凸向量优化问题解的等价性, 并进一步给出了具常值曲率 Hadamard 流形上的向量优化问题解的存在性定理. 同时, 介绍并研究了 Hadamard 流形上的一类集值向量场变分不等式的投影算法. 在假定向量场为伪单调的条件下, 我们证明了算法是可定义的且在变分不等式有解的情况下, 算法产生的序列全局收敛于所研究的变分不等式问题的一个解.

6.1　一类伪凸函数及其性质

在本节中, 设 $K \subseteq \mathbb{M}$ 是一非空测地凸集. 下面我们引入 Hadamard 流形上关于非光滑函数的伪凸性.

定义 6.1　设 f 为 K 上的局部 Lipschitz 函数, 称 f 是

(i) 在 K 上是拟凸函数, 如果对任意的 $x, y \in K$ 及 $t \in [0,1]$ 有

$$f(\gamma(t)) \leqslant \max\{f(x), f(y)\}$$

(ii) 在 K 上是半严格拟凸函数, 如果对 $\forall x, y \in K$ 且 $f(x) \neq f(y)$ 有

$$f(\gamma(t)) < \max\{f(x), f(y)\}, \quad \forall t \in [0,1]$$

其中,$\gamma(t): [0,1] \to \mathbb{M}$ 是连接 x 和 y 的测地线.

(iii) 在 K 上是伪凸函数, 如果对任意的 $x, y \in K$ 有

$$\exists\, \xi \in \partial_c f(x), \quad \langle \xi, \exp_x^{-1} y \rangle \geqslant 0 \Rightarrow f(y) \geqslant f(x)$$

定理 6.1　设 f 为 K 上的局部 Lipschitz 伪凸函数, 则 f 在 K 上是拟凸的和半严格拟凸的.

证明　我们首先证明 f 是拟凸的. 假设 f 不是拟凸函数, 则存在 $x, y \in K$ 和 $\bar{t} \in (0,1)$ 使得

$$f(\gamma(\bar{t})) > f(y) \geqslant f(x)$$

其中,$\gamma(t) = \exp_y t \exp_y^{-1} x$, $\forall t \in [0,1]$. 令

$$\Omega = \{t \in [0,\bar{t}] : f(\gamma(t)) = f(y)\}$$

因为 f 是局部 Lipschitz 连续的, 所以 Ω 为闭集, 设 f 在 $\hat{t}$ 点处达到最大值, 于是

$$f(\gamma(t)) > f(\gamma(\hat{t})) = f(y) \geqslant f(x), \quad \forall t \in (\hat{t}, \bar{t}] \tag{6.1}$$

现定义 $\beta : [0,1] \to K$ 如下:

$$\beta(s) = \gamma(s\bar{t} + (1-s)\hat{t})$$

则由引理 1.41, 存在 $l \in (\hat{t}, \bar{t})$ 及 $\xi \in \partial_c f(\beta(l)) = \partial_c f(\gamma(a))$ 使得

$$f(\gamma(\bar{t})) - f(\gamma(\hat{t})) = \langle \xi, \beta'(l) \rangle = (\bar{t} - \hat{t})\langle \xi, \gamma'(a) \rangle$$

其中,$a = l\bar{t} + (1-l)\hat{t} \in (\hat{t}, \bar{t})$. 结合式 (6.1) 可得

$$\langle \xi, \gamma'(a) \rangle > 0 \tag{6.2}$$

以及

$$f(\gamma(a)) > f(x)$$

由 f 的伪凸性知, 对 $\xi \in \partial_c f(\gamma(a))$ 有

$$\langle \xi, \exp_{\gamma(a)}^{-1} x \rangle < 0$$

容易验证 $\exp_{\gamma(a)}^{-1} x = (1-a)\gamma'(a)$, 于是

$$\langle \xi, \gamma'(a) \rangle < 0$$

这与式 (6.2) 相矛盾. 因而 f 是拟凸的.

下面我们说明 f 的半严格拟凸性. 如果 f 不是半严格拟凸函数, 则存在 $x, y \in K$ 及 $\bar{t} \in (0,1)$ 使得

$$f(\gamma(\bar{t})) \geqslant f(y) > f(x)$$

令 $g(t) = f(\gamma(t))$, 则 g 在 $[0,1]$ 上是连续函数, 设 g 在点 $\hat{t} \in [0,1]$ 处达到最大值. 不失一般性, 可设 $\hat{t} > 0$. 由于 $g(\hat{t}) > g(1) = f(x)$, 所以存在 $t_1 \in (0, \hat{t})$ 使得

$$f(\gamma(t)) = g(t) > f(x), \quad \forall t \in [t_1, \hat{t}] \tag{6.3}$$

定义 $\theta:[0,1]\to K$:

$$\theta(h)=\gamma(h\hat{t}+(1-h)t_1),\quad \forall h\in[0,1]$$

由引理 1.41 知, 存在 $t_0\in(t_1,\hat{t})$ 及 $\zeta\in\partial_c f(\theta(t_0))=\partial_c f(\gamma(b))$ 使得

$$f(\gamma(\hat{t}))-f(\gamma(t_1))=\langle\zeta,\theta'(t_0)\rangle=(\hat{t}-t_1)\langle\zeta,\gamma'(b)\rangle\geqslant 0$$

其中, $b=t_0\hat{t}+(1-t_0)t_1\in(t_1,\hat{t})$, 结合式 (6.3) 有

$$\langle\zeta,\gamma'(b)\rangle\geqslant 0 \tag{6.4}$$

及

$$f(\gamma(b))>f(x)$$

再次应用 f 的伪凸性可得

$$\langle\zeta,\exp_{\gamma(b)}^{-1}x\rangle<0$$

又 $\exp_{\gamma(b)}^{-1}x=(1-b)\gamma'(b)$, 故有

$$\langle\zeta,\gamma'(b)\rangle<0$$

而这与式 (6.4) 相矛盾. 因此 f 是严格半拟凸函数. 证毕.

下面我们给出非光滑拟凸函数的性质.

定理 6.2 设 f 在 K 上是局部 Lipschitz 的, 令 $x,y\in K$. 则 f 是拟凸的当且仅当

$$f(x)\leqslant f(y)\Rightarrow\langle\xi,\exp_y^{-1}x\rangle\leqslant 0,\quad \forall\xi\in\partial_c f(y) \tag{6.5}$$

或等价有

$$\exists\,\xi\in\partial_c f(y),\quad \langle\xi,\exp_y^{-1}x\rangle>0\Rightarrow f(x)>f(y)$$

证明 设 f 是拟凸的, $x,y\in K$ 及 $f(x)\leqslant f(y)$. 那么

$$f(\gamma(t))\leqslant f(y) \tag{6.6}$$

其中,$\gamma(t)=\exp_y t\exp_y^{-1}x$, $\forall t\in[0,1]$. 选取 $\delta>0$ 足够小, 因 $f\circ\exp_y$ 在 $B(0_y,\delta)$ 上

是局部 Lipschitz 的, 由式 (6.6), 我们有

$$\begin{aligned}&\limsup_{\|\omega\|<t\delta,t\downarrow 0}\frac{(f\circ\exp_y)(\omega+t\exp_y^{-1}x)-(f\circ\exp_y)(\omega)}{t}\\&=\limsup_{\|\omega\|<t\delta,t\downarrow 0}\left(\frac{f(\gamma(t))-f(y)-(f(\exp_y\omega)-f(y))}{t}\right.\\&\quad\left.+\frac{(f\circ\exp_y)(\omega+t\exp_y^{-1}x)-(f\circ\exp_y)(t\exp_y^{-1}x)}{t}\right)\\&=\limsup_{\|\omega\|<t\delta,t\downarrow 0}\frac{2L_y\|\omega\|}{t}\leqslant 2L_y\delta\end{aligned}$$

其中, L_y 是 $f\circ\exp_y$ 在 $B(0_y,\delta)$ 上的 Lipschitz 常数, 且上述不等式意味着

$$f^{\circ}(y;\exp_y^{-1}x)=(f\circ\exp_y)^{\circ}(0_y,\exp_y^{-1}x)\leqslant 0$$

即对任意的 $\xi\in\partial_c f(y)$, 有 $\langle\xi,\exp_y^{-1}x\rangle\leqslant 0$.

反之, 若式 (6.5) 成立, 则根据定理 6.1 第一部分的证明, 容易得出 f 是拟凸的. 证毕.

下面的结果表明, 对于 Hadamard 流形上的非光滑函数, 函数的伪凸性等价于其梯度的伪单调性.

定理 6.3　*设 f 在 K 上是局部 Lipschitz 的. 那么 f 是伪凸的当且仅当 $\partial_c f$ 在 K 上是伪单调的.*

证明　设 f 在 K 上是伪凸的. 设 $x,y\in K$ 和 $\xi\in\partial_c f(x)$ 使得

$$\langle\xi,\exp_x^{-1}y\rangle\geqslant 0\tag{6.7}$$

这就意味着

$$f(y)\geqslant f(x)\tag{6.8}$$

由 f 的伪凸性及定理 6.1, 我们知道 f 是拟凸的. 结合式 (6.8) 可得

$$f(\gamma(t))\leqslant\max\{f(x),f(y)\}=f(y),\quad\forall t\in[0,1]$$

其中, $\gamma(t)=\exp_y t\exp_y^{-1}x$, $\forall t\in[0,1]$. 由定理 6.2 有

$$\langle\zeta,\exp_y^{-1}\gamma(t)\rangle\leqslant 0,\quad\forall\zeta\in\partial_c f(y)$$

即对任意 $\zeta\in\partial_c f(y)$, 有

$$\langle\zeta,\exp_y^{-1}x\rangle\leqslant 0$$

这表明 $\partial_c f$ 是伪单调的.

反之, 若 $\partial_c f$ 在 K 上是伪单调的. 设 $x, y \in K, \xi \in \partial_c f(x)$ 且满足

$$\langle \xi, \exp_x^{-1} y \rangle \geqslant 0 \tag{6.9}$$

下面我们说明 $f(y) \geqslant f(x)$. 反证, 若 $f(y) < f(x)$, 则对于测地线 $\gamma : [0,1] \to M$, 且满足 $\gamma(0) = x$ 和 $\gamma(1) = y$, 由引理 1.41 知存在 $t_0 \in (0,1)$ 和 $\zeta \in \partial_c f(\gamma(t_0))$ 使得

$$f(y) - f(x) = \langle \zeta, \gamma'(t_0) \rangle < 0$$

注意到 $\exp_{\gamma(t_0)}^{-1} x = -t_0 \gamma'(t_0)$, 所以对 $\zeta \in \partial_c f(\gamma(t_0))$ 有

$$\langle \zeta, \exp_{\gamma(t_0)}^{-1} x \rangle > 0 \tag{6.10}$$

由于 $\partial_c f$ 是伪单调的, 所以

$$\langle \xi, \exp_x^{-1} \gamma(t_0) \rangle < 0, \quad \forall \xi \in \partial_c f(x)$$

再由 $\gamma(\cdot)$ 的定义可知

$$\langle \xi, t_0 \exp_x^{-1} y \rangle < 0, \quad \forall \xi \in \partial_c f(x)$$

而这与式 (6.9) 矛盾. 证毕.

6.2 向量变分不等式和向量优化问题的等价性

设 $K \subseteq \mathbb{M}$ 是一非空测地凸集, $f : \mathbb{M} \to R^p$ 为一向量值函数, 且 $f(x) = (f_1(x), \cdots, f_p(x))$. 我们考虑如下向量优化问题:

$$\begin{aligned} \text{(VOP)} \quad & \min \quad f(x) = (f_1(x), \cdots, f_p(x)) \\ & \text{s.t.} \quad x \in K \end{aligned}$$

定义 6.2 (i) 若对任意 $y \in \mathbb{M}$, 有

$$f(y) - f(\bar{x}) = (f_1(y) - f_1(\bar{x}), \cdots, f_p(y) - f_p(\bar{x})) \notin -R_+^p \backslash \{0\}$$

则称点 $\bar{x} \in \mathbb{M}$ 是 (VOP) 的有效解.

(ii) 若对任意 $y \in \mathbb{M}$, 有

$$f(y) - f(\bar{x}) = (f_1(y) - f_1(\bar{x}), \cdots, f_p(y) - f_p(\bar{x})) \notin -\text{int} R_+^p$$

则称 $\bar{x} \in \mathbb{M}$ 是 (VOP) 的弱有效解.

容易看出, 每个有效解是弱有效解.

利用广义次微分的概念, 我们引入下述向量变分不等式问题.

(1) Minty 型向量变分不等式问题 (MVVIP): 寻找 $x \in \mathbb{M}$ 使对 $\forall y \in \mathbb{M}$ 和所有的 $\xi_i \in \partial_c f_i(y)$, $i \in J = \{1, \cdots, p\}$, 有

$$(\langle \xi_1, \exp_y^{-1} x \rangle, \cdots, \langle \xi_p, \exp_y^{-1} x \rangle) \notin R_+^p \backslash \{0\}$$

(2) Stampacchia 型向量变分不等式问题 (SVVIP): 寻找 $x \in \mathbb{M}$, 使得存在 $\xi_i \in \partial_c f_i(x)$, $i \in J$, 且对 $\forall y \in \mathbb{M}$, 有

$$(\langle \xi_1, \exp_x^{-1} y \rangle, \cdots, \langle \xi_p, \exp_x^{-1} y \rangle) \notin -R_+^p \backslash \{0\}$$

(3) Minty 型弱向量变分不等式问题 (WMVVIP): 寻找 $x \in \mathbb{M}$ 使得对任意 $y \in \mathbb{M}$ 及 $\xi_i \in \partial_c f_i(y)$, $i \in J$, 有

$$(\langle \xi_1, \exp_y^{-1} x \rangle, \cdots, \langle \xi_p, \exp_y^{-1} x \rangle) \notin \mathrm{int} R_+^p$$

(4) Stampacchia 型弱向量变分不等式问题 (WSVVIP): 寻找 $x \in \mathbb{M}$, 使存在 $\xi_i \in \partial_c f_i(x)$, $i \in J$, 且对任意 $y \in \mathbb{M}$, 有

$$(\langle \xi_1, \exp_x^{-1} y \rangle, \cdots, \langle \xi_p, \exp_x^{-1} y \rangle) \notin -\mathrm{int} R_+^p$$

下面我们给出 Hadamard 流形上向量变分不等式和向量优化问题的等价关系.

定理 6.4 设对每个 $i \in J$, f_i 为 K 上的局部 Lipschitz 伪凸函数, 则 $x \in K$ 是 (VOP) 的有效解当且仅当 x 也是 (MVVIP) 的解.

证明 设 $x \in K$ 是(MVVIP)解, 但不是(VOP)的有效解, 则存在 $y \in K$ 使得

$$f(y) - f(x) = (f_1(y) - f_1(x), \cdots, f_p(y) - f_p(x)) \in -R_+^p \setminus \{0\}$$

即有

$$f_i(y) \leqslant f_i(x), \quad \forall\, i \in J \tag{6.11}$$

且在某个 $k \in J$ 处取严格不等式. 由定理 6.1 及式 (6.11) 可得

$$f_i(\gamma(t)) \leqslant f_i(x), \quad i \in J \tag{6.12}$$

其中,$\gamma(t) = \exp_x t \exp_x^{-1} y$, $\forall t \in [0,1]$, 且式 (6.12) 在某个 $k \in J$ 处取严格不等式. 令 $\bar{t} \in (0,1)$, 定义 $\beta(s) = \gamma(s\bar{t}), \forall s \in [0,1]$. 由引理 1.41 知, 存在 $l_i \in (0, \bar{t})$ 和 $\xi_i \in \partial_c f_i(\beta(l_i))$ 使得

$$f_i(\gamma(t)) - f_i(x) = \langle \xi_i, \beta'(l_i) \rangle = t \langle \xi_i, \gamma'(a_i) \rangle \tag{6.13}$$

其中, $a_i = l_i\bar{t}$, $z_i = \gamma(a_i)$. 结合式 (6.12) 和式 (6.13), 有

$$\langle \xi_i, \gamma'(a_i)\rangle \leqslant 0 \tag{6.14}$$

其中, $\xi_i \in \partial_c f_i(z_i)(i \in J)$, 且在某个 $k \in J$ 处严格不等式成立. 取 $t_0 \in (0,1)$ 且满足对所有的 $i \in J$ 有 $t_0 < a_i$, 于是

$$\exp^{-1}_{\gamma(a_i)} \gamma(t_0) = (t_0 - a_i)\gamma'(a_i) = \frac{a_i - t_0}{a_i} \exp^{-1}_{\gamma(a_i)} x$$

这样, 式 (6.14) 意味着

$$\langle \xi_i, \exp^{-1}_{\gamma(a_i)} \gamma(t_0)\rangle \geqslant 0, \quad \xi_i \in \partial_c f_i(z_i)$$

且在某个 $k \in J$ 处取严格不等式. 因 $f_i(i \in J)$ 均为伪凸函数, 由定理 6.3 知, 每个 $\partial_c f_i(i \in J)$ 是伪单调的, 所以

$$\langle \xi_{i_0}, \exp^{-1}_{\gamma(t_0)} \gamma(a_i)\rangle \leqslant 0, \quad \forall \xi_{i_0} \in \partial_c f_i(\gamma(t_0)) \tag{6.15}$$

且在某个 $k \in J$ 处取严格不等式. 又

$$\exp^{-1}_{\gamma(t_0)} \gamma(a_i) = (a_i - t_0)\gamma'(t_0) = \frac{t_0 - a_i}{t_0} \exp^{-1}_{\gamma(a_0)} x$$

结合式 (6.15) 可推出

$$\langle \xi_{i_0}, \exp^{-1}_{\gamma(t_0)} x\rangle \geqslant 0, \quad \forall \xi_{i_0} \in \partial_c f_i(\gamma(t_0))$$

且在某个 $k \in J$ 处取严格不等式. 所以对所有 $\xi_{i_0} \in \partial_c f_i(\gamma(t_0))(i \in J)$, 有

$$(\langle \xi_{1_0}, \exp^{-1}_{\gamma(t_0)} x\rangle, \cdots, \langle \xi_{p_0}, \exp^{-1}_{\gamma(t_0)} x\rangle) \in R^p_+ \backslash \{0\}$$

而这与 x 是 (MVVIP) 的解相矛盾.

反之, 假设 x 为 (VOP) 的有效解但不是 (MVVIP) 的解. 于是存在 $y \in K$ 及 $\xi_i \in \partial_c f_i(y)(i \in J)$, 使得

$$\langle \xi_i, \exp^{-1}_y x\rangle \geqslant 0$$

且在某个 $k \in J$ 处取严格不等式. 由 f_i 的伪凸性知

$$f_i(x) \geqslant f_i(y), \quad \forall i \in J \tag{6.16}$$

另一方面, 由定理 6.1 及定理 6.2 可得 f_k 是拟凸的, 且有

$$f_k(x) > f_k(y) \tag{6.17}$$

结合式 (6.16) 和式 (6.17), 这与 x 为 (VOP) 的有效解相矛盾. 证毕.

定理 6.5 设对每个 $i \in J, f_i$ 为 K 上的局部 Lipschitz 伪凸函数. 如果 $x \in K$ 是 (SVVIP) 的解, 那么 x 是 (MVVIP) 的解, 且 x 也是 (VOP) 的有效解.

证明 设 $x \in K$ 是 (SVVIP) 的解, 但不是 (MVVIP) 的解, 则存在 $y \in K$ 及 $\xi_i \in \partial_c f_i(y)$ 使得

$$(\langle \xi_1, \exp_y^{-1} x\rangle, \cdots, \langle \xi_p, \exp_y^{-1} x\rangle) \in R_+^p \backslash \{0\}$$

等价有

$$\langle \xi_i, \exp_y^{-1} x\rangle \geqslant 0, \quad i \in J$$

且在某个 $k \in J$ 处取严格不等式. 因 $f_i(i \in J)$ 是伪凸的, 由定理 6.3 知, $\partial_c f$ 是伪单调的, 于是

$$\langle \zeta_i, \exp_x^{-1} y\rangle \leqslant 0, \quad \forall \zeta_i \in \partial_c f(x), i \in J$$

且在某个 $k \in J$ 处严格不等式成立. 于是

$$(\langle \zeta_1, \exp_x^{-1} y\rangle, \cdots, \langle \zeta_p, \exp_x^{-1} y\rangle) \in -R_+^p \backslash \{0\}$$

而这与 x 是 (SVVIP) 的解矛盾. 再结合定理 6.4, x 也是 (VOP) 的解. 证毕.

由定理 6.5 和定理 6.3, 容易得到下面的结论.

推论 6.6 设 $f_i(i = 1, 2, \cdots, p)$ 在 K 上为局部 Lipschitz 的, 且对任意的 $i \in J, \partial_c f_i$ 是伪单调的. 如果 $x \in K$ 是 (SVVIP) 的解, 那么它也是 (MVVIP) 的解.

定理 6.7 设对每个 $i \in J$, 函数 f_i 为 K 上的局部 Lipschitz 伪凸函数, 那么 $x \in K$ 是 (WSVVIP) 的解当且仅当 x 是 (WMVVIP) 的解.

证明 设 $x \in K$ 是 (WSVVIP) 的解. 如果 x 不是 (WMVVIP) 的解, 则存在 $y \in K$ 及 $\xi_i \in \partial_c f_i(y), i \in J$ 使得

$$(\langle \xi_1, \exp_y^{-1} x\rangle, \cdots, \langle \xi_p, \exp_y^{-1} x\rangle) \in \mathrm{int} R_+^p$$

等价有

$$\langle \xi_i, \exp_y^{-1} x\rangle > 0, \quad i \in J$$

因 $f_i(i \in J)$ 是伪凸函数, 由定理 6.3 知 $\partial_c f_i(i \in J)$ 是伪单调的, 于是

$$\langle \zeta_i, \exp_x^{-1} y\rangle < 0, \quad \forall \zeta_i \in \partial_c f_i(x)$$

这与 x 是 (WSVVIP) 的解矛盾.

现设 $x \in K$ 是 (WMVVIP) 的解. 考虑任意 $y \in K$ 及任何序列 $t_m \in (0, 1]$ 且满足 $\{t_m\} \searrow 0$. 由 K 的测地凸性可知

$$x_m = \gamma(t_m) = \exp_x t_m \exp_x^{-1} y \in K$$

因 $x \in K$ 是 (WMVVIP) 的解, 所以对任意 $\xi_i^m \in \partial_c f_i(\gamma(t_m))$, $i \in J$, 有

$$(\langle \xi_1^m, \exp_{\gamma(t_m)}^{-1} x\rangle, \cdots, \langle \xi_p^m, \exp_{\gamma(t_m)}^{-1} x\rangle) \notin \mathrm{int} R_+^p$$

于是

$$(\langle P_{x,x_m}\xi_1^m, \exp_x^{-1}\gamma(t_m)\rangle, \cdots, \langle P_{x,x_m}\xi_p^m, \exp_x^{-1}\gamma(t_m)\rangle) \notin -\mathrm{int} R_+^p$$

由 $\gamma(t_m)$ 的定义及 $t_m \in (0,1]$, 我们可以得到

$$(\langle P_{x,x_m}\xi_1^m, \exp_x^{-1} y\rangle, \cdots, \langle P_{x,x_m}\xi_p^m, \exp_x^{-1} y\rangle) \notin -\mathrm{int} R_+^p$$

又 $f_i(i \in J)$ 是局部 Lipschitz 的, 由引理 1.42 的结论 (i) 知, 存在 $k > 0$ 使得对充分大的 m 及 $i \in J$, $\|\xi_i^m\|_{T_{\gamma(t_m)}M*} \leqslant k$. 于是

$$\|P_{x,x_m}(\xi_i^m)\|_{T_{\gamma(0)}M*} \leqslant k$$

因此存在子列 $\{P_{x,x_{m_k}}\xi_i^{m_k}\}$ 且在弱 * 拓扑下有 $P_{x,x_{m_k}}\xi_i^{m_k} \to \zeta_i$. 结合引理 1.42 的结论 (ii) 可得, 对每个 $i \in J$ 有 $\zeta_i \in \partial_c f_i(x)$. 从而存在 $\zeta_i \in \partial_c f_i(x)(i \in J)$, 使得

$$(\langle \zeta_1, \exp_x^{-1} y\rangle, \cdots, \langle \zeta_p, \exp_x^{-1} y\rangle) \notin -\mathrm{int} R_+^p$$

故 x 是 (WSVVIP) 的解. 证毕

定理 6.8 设对每个 $i \in J$, 函数 f_i 是 K 上的局部 Lipschitz 伪凸函数. 如果 $x \in K$ 是 (WSVVIP) 的解, 那么 x 也是 (VOP) 的弱有效解.

证明 假设 $x \in K$ 是 (WSVVIP) 的解, 但 x 不是 (VOP) 的弱有效解, 则存在 $y \in K$ 使得

$$(f_1(y) - f_1(x), \cdots, f_p(y) - f_p(x)) \in -\mathrm{int} R_+^p$$

等价地有

$$f_i(y) < f_i(x), \quad i \in J$$

而 $f_i(i \in J)$ 的伪凸性意味着

$$\langle \xi_i, \exp_x^{-1} y\rangle < 0, \quad \forall \xi_i \in \partial_c f_i(x)$$

于是对 $\forall \xi_i \in \partial_c f_i(x)$, 有

$$(\langle \xi_1, \exp_x^{-1} y\rangle, \cdots, \langle \xi_p, \exp_x^{-1} y\rangle) \in -\mathrm{int} R_+^p$$

而这与 x 是 (WSVVIP) 的解相矛盾. 证毕.

定理 6.9 设对每个 $i \in J$, 函数 f_i 是 K 上的局部 Lipschitz 伪凸函数. 如果 $x \in K$ 是 (VOP) 的弱有效解, 那么 x 也是 (WMVVIP) 的解.

证明　假设 $x \in K$ 是 (VOP) 的弱有效解, 但不是 (WMVVIP) 的解, 则存在 $y \in K$ 及 $\xi_i \in \partial_c f_i(y)(i \in J)$, 使得

$$(\langle \xi_1, \exp_y^{-1} x\rangle, \cdots, \langle \xi_p, \exp_y^{-1} x\rangle) \in \operatorname{int} R_+^p$$

这就表明对任意 $i \in J$ 有

$$\langle \xi_i, \exp_y^{-1} x\rangle > 0$$

由 $f_i(i \in J)$ 的伪凸性及定理 6.1 和定理 6.2 知,f_i 是拟凸的, 且有

$$f_i(x) > f_i(y), \quad i \in J$$

从而

$$(f_1(y) - f_1(x), \cdots, f_p(y) - f_p(x)) \in -\operatorname{int} R_+^p$$

这与 x 是 (VOP) 的弱有效解矛盾. 证毕.

根据定理 6.7～ 定理 6.9, 我们容易得到下面的结论.

定理 6.10　设 K 为 $\mathbb{M}$ 的一非空测地凸集, 且对每个 $i \in J$, 函数 f_i 是 K 上的局部 Lipschitz 伪凸函数, 则 $x \in K$ 是 (VOP) 的弱有效解当且仅当 x 是 (WSVVIP) 的解.

定理 6.11　设 K 为 $\mathbb{M}$ 的一非空测地凸集, 且对每个 $i \in J$, 函数 f_i 是 K 上的局部 Lipschitz 伪凸函数, 则 $x \in K$ 是 (VOP) 的弱有效解当且仅当 x 是 (WMVVIP) 的解.

6.3　向量优化问题解的存在性

本节我们给出具常值曲率的Hadamard流形上的向量优化问题解的存在性定理.

定理 6.12　设 $\mathbb{M}$ 为一具有常值曲率的 Hadamard 流形, K 为 $\mathbb{M}$ 的一非空测地凸集, o 是 K 中任一点, 且对每个 $i \in J$, 函数 f_i 为 K 上的局部 Lipschitz 伪凸函数. 如果存在 K 的一非空有界集 D, 使得对任意 $x \in K \setminus D$, 存在 $y \in D$, 使对任意 $z_i \in \partial_c f_i(x)$ 有

$$(\langle z_1, \exp_x^{-1} y\rangle, \cdots, \langle z_p, \exp_x^{-1} y\rangle) \in -\operatorname{int} R_+^p$$

那么问题 (VOP) 存在弱有效解.

证明　由定理 6.10 可知, 只需证明向量变分不等式 (WSVVIP) 有解即可. 令 $K_r = K \bigcap \overline{B(o,r)}$, 这里 r 取足够大使得 $D \subset \operatorname{int}_K K_r$, 且 $\overline{B(o,r)}$ 是以 o 为中心, 半

径为 r 的闭球, $\text{int}_K K_r$ 是 K_r 的相对内部. 显然 K_r 是非空紧凸集. 对所有 $y \in K_r$, 定义集值映射 $G: K_r \to 2^{K_r}$

$$G(y) = \{x \in K_r : \exists \xi_i \in \partial_c f_i(x) \text{s.t.} (\langle \xi_1, \exp_x^{-1} y \rangle, \cdots, \langle \xi_p, \exp_x^{-1} y \rangle) \notin -\text{int} R_+^p\}$$

我们首先证明 $G(y)$ 满足引理 1.43 中的条件 (ii). 对任意的有限集 $\{x_1, x_2, \cdots, x_m\} \subseteq K_r$ 与实数 $t_1, t_2, \cdots, t_m \geqslant 0$ 且满足 $\sum_{k=1}^{m} t_k = 1$, 若 $G(y)$ 不满足条件 (ii), 则存在 $x \in K_r$ 使得

$$x \in \text{conv}(\{x_1, x_2, \cdots, x_m\})$$

但

$$x \notin \bigcup_{k=1}^{m} G(x_k)$$

这表明对所有的 $k = 1, 2, \cdots, m$, 有

$$(\langle \xi_1, \exp_x^{-1} x_k \rangle, \cdots, \langle \xi_p, \exp_x^{-1} x_k \rangle) \in -\text{int} R_+^p, \quad \forall \xi_i \in \partial_c f_i(x), i \in J$$

令

$$U = \{y \in K_r : (\langle \xi_1, \exp_x^{-1} y, \cdots, \xi_p, \exp_x^{-1} y \rangle) \in -\text{int} R_+^p, \forall \xi_i \in \partial_c f_i(x), i \in J\}$$

显然对所有的 $k = 1, 2, \cdots, m$, 有 $x_k \in U$. 若 U 是测地凸集, 则有

$$x \in \text{conv}\{x_1, \cdots, x_n\} \subseteq U$$

从而 $0 \in -\text{int} R_+^p$, 矛盾. 下面我们证明 U 是测地凸集, 对任意 $i \in J$, 令

$$L_{x,\xi_i} = \{y \in K_r : \langle \xi_i, \exp_x^{-1} y \rangle < 0, \forall \xi_i \in \partial_c f_i(x)\}$$

则

$$U = \bigcap_{i \in J} L_{x,\xi_i}$$

下面证明 L_{x,ξ_i} 是测地凸集. 任取 $p, q \in L_{x,\xi_i}$ 且 $p \neq q$. 考虑连接 p 和 q 的测地线 $\gamma(t)$, 我们需要说明: $\gamma(t) \in L_{x,\xi_i}$. 根据引理 1.47 的证明过程, 我们知道, 对每一个 $t \in [0,1]$, 存在 $a, b \geqslant 0$ 使得

$$\exp_x^{-1} \gamma(t) = a \exp_x^{-1} p + b \exp_x^{-1} q \tag{6.18}$$

若 $a = b = 0$, 那么式 (6.18) 意味着存在 $\bar{t} \in (0,1)$ 使得 $\gamma(\bar{t}) = x$, 于是有

$$\bar{t} \exp_x^{-1} p + (1 - \bar{t}) \exp_x^{-1} q = 0$$

结合 $p,q \in L_{x,\xi_i}$, 对 $\forall \xi_i \in \partial_c f_i(x)$, 我们可以得到

$$\begin{aligned} 0 &= \langle \xi_i, \bar{t} \exp_x^{-1} p + (1-\bar{t}) \exp_x^{-1} q \rangle \\ &= \bar{t} \langle \xi_i, \exp_x^{-1} p \rangle + (1-\bar{t}) \langle \xi_i, \exp_x^{-1} q \rangle < 0 \end{aligned}$$

矛盾. 故 $a > 0$ 或 $b > 0$. 由式 (6.18) 有

$$\langle \xi_i, \exp_x^{-1} \gamma(t) \rangle = a \langle \xi_i, \exp_x^{-1} p \rangle + b \langle \xi_i, \exp_x^{-1} q \rangle < 0, \quad \forall \xi_i \in \partial_c f_i(x)$$

这就意味着 $\gamma(t) \in L_{x,\xi_i}$, L_{x,ξ_i} 是测地凸集, 从而 U 也为测地凸集.

其次需要证明对任意 $y \in K_r$, $G(y)$ 是紧集. 由于 K_r 是紧集且 $G(y) \subseteq K_r$, 所以我们只需要说明对任意 $y \in K_r$, $G(y)$ 是闭集即可. 令 $\{x_n\} \subset G(y)$ 且 $x_n \to x_* \in K_r$, 则存在 $\xi_i^n \in \partial_c f_i(x_n), i = 1, 2, \cdots, p$, 使得

$$(\langle \xi_1^n, \exp_{x_n}^{-1} y \rangle, \cdots, \langle \xi_p^n, \exp_{x_n}^{-1} y \rangle) \notin -\mathrm{int} R_+^p$$

于是

$$(\langle P_{x_*,x_n} \xi_1^n, P_{x_*,x_n} \exp_{x_n}^{-1} y \rangle, \cdots, \langle P_{x_*,x_n} \xi_p^n, P_{x_*,x_n} \exp_{x_n}^{-1} y \rangle) \notin -\mathrm{int} R_+^p$$

因每个 $f_i (i \in J)$ 是局部 Lipschitz 的, 由引理 1.42(i) 知, 存在 $L > 0$ 使对充分大的 n 及 $i \in J$, $\|\xi_i^n\|_{T_{x_n} M} \leqslant L$, 从而

$$\|P_{x_*,x_n}(\xi_i^n)\|_{T_{x_*} M} \leqslant L$$

因而存在子列, 不妨记为 $(P_{x_*,x_{n_k}}(\xi_i^{n_k}))$, 并且弱 * 收敛到 ζ_i. 根据引理 1.42(ii), 我们知道, 对任意 $i \in J$, 有 $\zeta_i \in \partial_c f_i(x_*)$. 所以存在 $\zeta_i \in \partial_c f_i(x_*) (i \in J)$, 使得

$$(\langle \zeta_1, \exp_{x_*}^{-1} y \rangle, \cdots, \langle \zeta_p, \exp_{x_*}^{-1} y \rangle) \notin -\mathrm{int} R_+^p$$

这就表明 $x_* \in G(y)$, 因而 $G(y)$ 是闭的. 由引理 1.43 可知: 存在 $\bar{x} \in K_r$ 使得 $\bar{x} \in \bigcap_{y \in K_r} G(y)$. 故对任意 $y \in K_r$, 存在 $\xi_i \in \partial_c f_i(\bar{x}) (i \in J)$, 使得

$$(\langle \xi_1, \exp_{\bar{x}}^{-1} y \rangle, \cdots, \langle \xi_p, \exp_{\bar{x}}^{-1} y \rangle) \notin -\mathrm{int} R_+^p \tag{6.19}$$

另一方面, 由题设可知 $\bar{x} \in B(o,r)$, 所以对任意 $u \in K \backslash K_r$, 存在 $\lambda \in (0,1)$ 满足

$$\exp_{\bar{x}} \lambda \exp_{\bar{x}}^{-1} u \in K_r$$

由式 (6.19) 知存在 $\xi_i \in \partial_c f_i(\bar{x})$, $i = 1, 2, \cdots, p$, 使得

$$(\langle \xi_1, \exp_{\bar{x}}^{-1} \exp_{\bar{x}} \lambda \exp_{\bar{x}}^{-1} u \rangle, \cdots, \langle \xi_p, \exp_{\bar{x}}^{-1} \exp_{\bar{x}} \lambda \exp_{\bar{x}}^{-1} u \rangle) \notin -\mathrm{int} R_+^p$$

于是有

$$(\langle \xi_1, \exp_{\bar{x}}^{-1} u \rangle, \cdots, \langle \xi_p, \exp_{\bar{x}}^{-1} u \rangle) \notin -\mathrm{int} R_+^p$$

故对每个 $y \in K$, 存在 $\xi_i \in \partial_c f_i(\bar{x})$, $i \in J$, 使得

$$(\langle \xi_1, \exp_{\bar{x}}^{-1} y \rangle, \cdots, \langle \xi_p, \exp_{\bar{x}}^{-1} y \rangle) \notin -\mathrm{int} R_+^p$$

这就意味着 $\bar{x}$ 是 (WSVVIP) 的解. 证毕.

推论 6.13 设 $\mathbb{M}$ 是具有常值曲率的 Hadamard 流形, K 为 $\mathbb{M}$ 的一非空闭测地凸集, 函数 f_i 是 K 上连续可微的伪凸函数, $i \in J = \{1, 2, \cdots, p\}$. 假设存在 K 的非空有界集 D 使得对任意 $x \in K \setminus D$, 存在 $y \in D$, 且满足

$$(\langle \nabla f_1(x), \exp_x^{-1} y \rangle, \cdots, \langle \nabla f_p(x), \exp_x^{-1} y \rangle) \in -\mathrm{int} R_+^p$$

则问题 (VOP) 存在弱有效解.

证明 因 $f_i (i \in J)$ 为连续可微函数, 故 $f_i (i \in J)$ 是局部 Lipschitz 的. 从而根据定理 6.12 知问题 (VOP) 存在弱有效解. 证毕.

推论 6.14 设 $\mathbb{M}$ 是一具有常值曲率的 Hadamard 流形, K 为 $\mathbb{M}$ 的一非空闭测地凸集, $o \in K$, 函数 $f_i (i \in J)$ 是 K 上连续可微的伪凸函数. 假设存在 $y_0 \in K$ 使集合

$$(\langle \nabla f_1(x), \exp_x^{-1} y \rangle, \cdots, \langle \nabla f_p(x), \exp_x^{-1} y \rangle) \notin -\mathrm{int} R_+^p$$

是紧集, 则问题 (VOP) 存在弱有效解.

证明 令

$$D = \{x \in K : (\langle \nabla f_1(x), \exp_x^{-1} y_0 \rangle, \cdots, \langle \nabla f_p(x), \exp_x^{-1} y_0 \rangle) \notin -\mathrm{int} R_+^p\}$$

由于 $y_0 \in D$, 所以 D 非空. 由已知条件, D 是紧集且对任意 $x \in K \setminus D$, 有

$$(\langle \nabla f_1(x), \exp_x^{-1} y_0 \rangle, \cdots, \langle \nabla f_p(x), \exp_x^{-1} y_0 \rangle) \in -\mathrm{int} R_+^p$$

根据推论 6.13 可知问题 (VOP) 存在弱有效解. 证毕.

6.4 集值向量场的变分不等式问题的投影算法

在本节中, 我们研究 Hadamard 流形上的一类集值向量场变分不等式. 设 $\mathbb{M}$ 为一 Hadamard 流形, K 是 $\mathbb{M}$ 上的一个非空闭凸集, $F : K \to 2^{T\mathbb{M}}$ 是一集值向量场, 即对每一个 $x \in \mathbb{M}$, 都有 $F(x) \in T_x\mathbb{M}$. 考虑如下集值变分不等式问题 (简记为 SVIHM(F, K)): 找 $x \in K$ 及 $\xi \in F(x)$ 使得

$$\langle \xi, \exp_x^{-1} y \rangle \geqslant 0, \quad \forall y \in K \tag{6.20}$$

其中, $\exp^{-1}$ 是指数映射的逆映射 (详见第 1 章). 如果 $F: K \to T\mathbb{M}$ 是单值向量场, 则问题 (6.20) 变成 Hadamard 流形上的单值变分不等式问题: 找 $x \in K$, 使得

$$\langle F(x), \exp_x^{-1} y\rangle \geqslant 0, \quad \forall y \in K \tag{6.21}$$

首先我们介绍两个结果, 它们在算法的收敛性证明中起着关键的作用.

由命题 1.45 容易得到下面的结果.

命题 6.15 设 $x \in K$, $\xi \in F(x)$. 如下四个论述等价:

(i) x 是 (6.20) 的解;

(ii) 对某个 $\mu_0 > 0$ 有 $x = \mathcal{P}_K(\exp_x(-\mu_0\xi))$;

(iii) 对任意 $\mu > 0$ 有 $x = \mathcal{P}_K(\exp_x(-\mu\xi))$;

(iv) $r_\mu(x, \xi) = 0$, 其中

$$r_\mu(x,\xi) := \exp_x^{-1} \mathcal{P}_K(\exp_x(-\mu\xi)) \tag{6.22}$$

引理 6.16 对任意的 $x \in K$ 及 $\xi \in F(x)$, 有

$$\langle \xi, -r_\mu(x,\xi)\rangle \geqslant \mu^{-1} d^2(x, \mathcal{P}_K(\exp_x(-\mu\xi))) \tag{6.23}$$

证明 设 $x \in K$, $\xi \in F(x)$. 记 $u := \exp_x(-\mu\xi)$, $v := \mathcal{P}_K(\exp_x(-\mu\xi))$. 由式 (1.11) 得

$$\langle \exp_v^{-1} x, \exp_v^{-1} u\rangle \leqslant 0 \tag{6.24}$$

考虑测地三角形 $\triangle(xuv)$. 由命题 1.44(ii) 可得

$$d^2(x,v) + d^2(x,u) - 2\langle \exp_x^{-1} u, \exp_x^{-1} v\rangle \leqslant d^2(u,v) \tag{6.25}$$

和

$$d^2(x,v) + d^2(u,v) - 2\langle \exp_v^{-1} x, \exp_v^{-1} u\rangle \leqslant d^2(x,u) \tag{6.26}$$

把式 (6.25) 和式 (6.26) 相加, 由式 (6.24) 得

$$d^2(x,v) \leqslant \langle \exp_x^{-1} u, \exp_x^{-1} v\rangle$$

因此

$$\langle -\mu\xi, \exp_x^{-1} \mathcal{P}_K(\exp_x(-\mu\xi))\rangle \geqslant d^2(x, \mathcal{P}_K(\exp_x(-\mu\xi))) \tag{6.27}$$

结合式 (6.22) 及式 (6.27) 可得结论. 证毕.

接下来我们给出变分不等式问题 (6.20) 的投影算法.

算法 6.1 取初始点 $x_0 \in K$ 和三个参数 $\sigma > 0, \mu \in (0, 1/\sigma)$ 及 $\theta \in (0,1)$. 令 $i = 0$.

步骤 1. 若对某个 $\xi \in F(x_i)$ 有 $r_\mu(x, \xi) = 0$, 则停止; 否则任取 $\xi_i \in F(x_i)$, 定义

$$\gamma_i(t) = \exp_{x_i} t \exp_{x_i}^{-1}[\mathcal{P}_K(\exp_{x_i}(-\mu\xi_i))]$$

步骤 2. 设 k_i 是满足下述条件的最小非负整数 k:

$$\sup\{\langle \xi, -\gamma_i'(\theta^k)\rangle : \xi \in F(\gamma_i(\theta^k))\} \geqslant \sigma d^2(x_i, \mathcal{P}_K(\exp_{x_i}(-\mu\xi_i))) \tag{6.28}$$

令 $\eta_i = \theta^{k_i}$, $z_i = \gamma_i(\eta_i)$.

步骤 3. 计算 $x_{i+1} := \mathcal{P}_{K\cap H_i}(x_i)$, 其中

$$H_i := \{x \in \mathbb{M} : \sup\{\langle \xi, \exp_{z_i}^{-1} x\rangle : \xi \in F(z_i)\} \leqslant 0\} \tag{6.29}$$

令 $i := i + 1$, 然后转到步骤 1.

我们需要作如下假设:

(A1) 变分不等式问题 (6.20) 的解集 (记为 SVI(F, K)) 是非空的;

(A2) F 是一上半 Kuratowski 连续及下半连续向量场, 且对任意的 $x \in K, F(x)$ 是紧值的;

(A3) F 是 K 上的伪单调向量场 (关于伪单调向量场的概念可参见第 1 章);

(A4) F 把有界集映成有界集.

现在我们来说明算法 6.1 是可行的.

命题 6.17 (i) 如果 $r_\mu(x_i, \xi_i) = 0$, 则当前迭代点 x_i 是问题 (6.20) 的一个解;

(ii) 如果 $x_i \notin S$, 则存在一非负整数 k 满足条件 (6.28);

(iii) x_{i+1} 是有定义的;

(iv) x_i, $z_i \in K$.

证明 (i) 该结论直接由命题 (6.15) 可得.

(ii) 设对所有的 k 及 $y \in F(\gamma_i(\theta^k))$, 有

$$\langle y, -\gamma_i'(\theta^k)\rangle < \sigma d^2(x_i, \mathcal{P}_K(\exp_{x_i}(-\mu\xi_i)))$$

因 $\gamma_i'(t) = P_{\gamma_i(t), x_i} \exp_{x_i}^{-1}[\mathcal{P}_K(\exp_{x_i}(-\mu\xi_i))]$ 及平行转移是等距的, 由引理 1.46(iv) 可得

$$\begin{aligned}\lim_{k\to\infty} \gamma_i'(\theta^k) &= \lim_{k\to\infty} P_{\gamma_i(\theta^k), x_i} \exp_{x_i}^{-1}[\mathcal{P}_K(\exp_{x_i}(-\mu\xi_i))]\\ &= \exp_{x_i}^{-1}[\mathcal{P}_K(\exp_{x_i}(-\mu\xi_i))]\\ &= r_\mu(x_i, \xi_i)\end{aligned}$$

由于 F 是下半连续的, $\xi_i \in F(x_i)$, $\lim\limits_{k\to\infty} \gamma_i(\theta^k) = x_i$, 故存在序列 $y_k \in F(\gamma_i(\theta^k))$ 使得 $\lim\limits_{k\to\infty} y_k = \xi_i$. 因而对每个 k, 有

$$\langle y_k, -\gamma_i'(\theta^k)\rangle < \sigma d^2(x_i, \mathcal{P}_K(\exp_{x_i}(-\mu\xi_i)))$$

在上式中, 令 $k \to \infty$, 有

$$\langle \xi_i, -r_\mu(x_i,\xi_i)\rangle \leqslant \sigma d^2(x_i, \mathcal{P}_K(\exp_{x_i}(-\mu\xi_i)))$$

根据引理 6.16, 可得

$$\mu^{-1} d^2(x_i, \mathcal{P}_K(\exp_{x_i}(-\mu\xi_i))) \leqslant \sigma d^2(x_i, \mathcal{P}_K(\exp_{x_i}(-\mu\xi_i))) \tag{6.30}$$

因为 $x_i \notin S$, 故有 $d^2(x_i, \mathcal{P}_K(\exp_{x_i}(-\mu\xi_i))) \neq 0$. 由此从式 (6.30) 可得 $\mu^{-1} \leqslant \sigma$, 但 $\mu < 1/\sigma$. 矛盾.

(iii) 我们只需要证明, H_i 是Hadamard 流形$\mathbb{M}$上的非空闭凸子集即可. 注意到

$$\begin{aligned} H_i :&= \{x \in \mathbb{M} : \sup\{\langle \xi, \exp_{z_i}^{-1} x\rangle : \xi \in F(z_i)\} \leqslant 0\} \\ &= \bigcap_{\xi \in F(z_i)} \{x \in \mathbb{M} : \langle \xi, \exp_{z_i}^{-1} x\rangle \leqslant 0\} \end{aligned}$$

根据引理 1.46(i), 容易看出 H_i 是闭的. 由引理 1.47 知 H_i 是凸的. 非空性只需注意到 $z_i \in H_i$ 即可.

(iv) 由 x_i 的定义可得 $x_i \in K$. 又 $\gamma_i(\cdot)$ 是连接 x_i 和 $\mathcal{P}_K[\exp_{x_i}(-\mu\xi_i)]$ 的测地线, 从而由 K 的凸性及 z_i 的定义可知 $z_i \in K$.

定理 6.18　设 $\{x_i\}$ 是由算法 6.1 所产生的无穷序列. 如果序列 $\{x_i\}$ 满足假设 (A1)~(A4), 那么 $\{x_i\}$ 收敛于问题 (6.20) 的一个解.

证明　设 x^* 是式 (6.20) 的任一解, 即对所有 $y \in K$, 存在 $x^* \in K$ 和 $\xi^* \in F(x^*)$ 使得

$$\langle \xi^*, \exp_{x^*}^{-1} y\rangle \geqslant 0$$

由 F 在 K 上的伪单调性可知

$$\langle \xi, \exp_y^{-1} x^*\rangle \leqslant 0, \quad \forall y \in K, \xi \in F(y)$$

由于 $z_i \in K$, 所以

$$\langle \xi, \exp_{z_i}^{-1} x^*\rangle \leqslant 0, \quad \forall \xi \in F(z_i)$$

这说明 $x^* \in H_i$, 因此 $x^* \in K \cap H_i$. 应用引理 1.48, 由 $x_{i+1} = \mathcal{P}_{K\cap H_i}(x_i)$ 可得

$$d^2(x_{i+1}, x^*) \leqslant d^2(x_i, x^*) - d^2(x_i, x_{i+1}) \tag{6.31}$$

这表明序列 $\{d^2(x_i, x^*)\}$ 是不增的, 从而是收敛的. 因此, 序列 $\{x_i\}$ 是有界的, 并且

$$\lim_{i\to\infty} d(x_i, x_{i+1}) = 0 \tag{6.32}$$

由 $\{x_i\}$ 的有界性知, 存在子列 $\{x_{i_j}\}$ 并且收敛于 $\overline{x}$. 又因 F 将有界集映成有界集, 且 $\{F(x_i) : i \in N\}$ 是有界的, 从而 $\{\xi_i\}$ 也是有界的. 所以存在 $\{\xi_i\}$ 的子列 $\{\xi_{i_j}\}$ 收敛于 $\overline{\xi}$. 由 F 的上半 Kuratowski 连续性可得, $\overline{\xi} \in F(\overline{x})$. 而且由命题 1.45(iii) 可得序列 $\{\mathcal{P}_K(\exp_{x_i}(-\mu\xi_i))\}$ 有界. 再根据 z_i 的定义, 我们知道序列 $\{z_i\}$ 和 $\{F(z_i)\}$ 均有界.

因 F 是紧值的, 由式 (6.28) 可知, 存在 $\zeta_i \in F(z_i)$ 使得

$$\langle \zeta_i, -\gamma_i'(\eta_i)\rangle \geqslant \sigma d^2(x_i, \mathcal{P}_K(\exp_{x_i}(-\mu\xi_i)))$$

从而

$$\langle \zeta_i, -\eta_i\gamma_i'(\eta_i)\rangle \geqslant \sigma\eta_i d^2(x_i, \mathcal{P}_K(\exp_{x_i}(-\mu\xi_i))) \tag{6.33}$$

定义 $\rho_i(t) = \gamma_i((1-t)\eta_i)$, $t \in [0,1]$. 那么 $\rho_i(t)$ 是连接 z_i 和 x_i 的测地线. 应用链式法则可得

$$\rho_i'(t) = \gamma_i'((1-t)\eta_i)(-\eta_i)$$

特别地, 有

$$\rho_i'(0) = -\eta_i\gamma_i'(\eta_i) \tag{6.34}$$

注意到连接 z_i 和 x_i 的测地线可表示成 $\rho_i(t) = \exp_{z_i} t\exp_{z_i}^{-1} x_i$, $t \in [0,1]$, 所以

$$\rho_i'(0) = \exp_{z_i}^{-1} x_i \tag{6.35}$$

因此, 由式 (6.33)~ 式 (6.35) 可得

$$\langle \zeta_i, \exp_{z_i}^{-1} x_i\rangle \geqslant \sigma\eta_i d^2(x_i, \mathcal{P}_K(\exp_{x_i}(-\mu\xi_i))) \tag{6.36}$$

由于 $x_{i+1} = \mathcal{P}_{K\cap H_i}(x_i)$, $\zeta_i \in F(z_i)$, 由式 (6.29), 可知

$$\langle \zeta_i, \exp_{z_i}^{-1} x_{i+1}\rangle \leqslant 0 \tag{6.37}$$

由于序列 $\{F(z_i)\}$ 是有界的, 故序列 $\{\zeta_i\}$ 是有界的, 从而 $\{\langle \zeta_i, \exp_{z_i}^{-1} x_i\rangle\}$ 也是有界的. 不失一般性, 我们假设 $\lim\limits_{j\to\infty}\langle \zeta_{i_j}, \exp_{z_{i_j}}^{-1} x_{i_j}\rangle$ 存在. 由引理 1.46 的结论 (i), 结合式 (6.32) 和式 (6.37) 可得

$$\lim_{j\to\infty}\langle \zeta_{i_j}, \exp_{z_{i_j}}^{-1} x_{i_j}\rangle = \lim_{j\to\infty}\langle \zeta_{i_j}, \exp_{z_{i_j}}^{-1} x_{i_j+1}\rangle \leqslant 0 \tag{6.38}$$

因此, 由式 (6.36) 和式 (6.38) 可得

$$\lim_{j\to\infty}\eta_{i_j}d^2(x_{i_j},\mathcal{P}_K(\exp_{x_{i_j}}(-\mu\xi_{i_j})))=0 \tag{6.39}$$

我们考虑如下两种情况. 首先假设 $\limsup\limits_{j\to\infty}\eta_{i_j}>0$. 由式 (6.39), 有

$$\liminf_{j\to\infty}d(x_{i_j},\mathcal{P}_K(\exp_{x_{i_j}}(-\mu\xi_{i_j})))=0$$

由于 $\{x_{i_j}\}$ 和 $\{\xi_{i_j}\}$ 均为收敛序列, 所以

$$d(\overline{x},\mathcal{P}_K(\exp_{\overline{x}}(-\mu\overline{\xi})))=0$$

因此由命题 6.15 可得 $\overline{x}\in S$. 下面我们证明序列 $\{x_i\}$ 收敛于 $\overline{x}$. 在前面的论述中, 用 $\overline{x}$ 替换 x^*, 我们得到序列 $\{d(x_i,\overline{x})\}$ 是不增的, 从而是收敛的. 由于 $\overline{x}$ 是 $\{x_i\}$ 的聚点, 并且 $\{d(x_i,\overline{x})\}$ 的某个子序列收敛于 0, 这就表明整个序列 $\{d(x_i,\overline{x})\}$ 收敛于 0, 因而有 $\lim\limits_{i\to\infty}x_i=\overline{x}$.

下面假设 $\lim\limits_{j\to\infty}\eta_{i_j}=0$. 根据 η_i 的选取, 我们有

$$\langle\xi,-\gamma'_{i_j}(\gamma^{-1}\eta_{i_j})\rangle<\sigma d^2(x_{i_j},\mathcal{P}_K(\exp_{x_{i_j}}(-\mu\xi_{i_j}))),\forall\xi\in F(\gamma_{i_j}(\gamma^{-1}\eta_{i_j}))$$

由于

$$\gamma'_{i_j}(t)=P_{\gamma_{i_j}(t),x_{i_j}}\exp^{-1}_{x_{i_j}}[\mathcal{P}_K(\exp_{x_{i_j}}(-\mu\xi_{i_j}))]$$

所以对所有的 $\xi\in F(\gamma_{i_j}(\gamma^{-1}\eta_{i_j}))$ 有

$$\begin{aligned}&\langle\xi,-P_{\gamma_{i_j}(\gamma^{-1}\eta_{i_j}),x_{i_j}}\exp^{-1}_{x_{i_j}}[\mathcal{P}_K(\exp_{x_{i_j}}(-\mu\xi_{i_j}))]\rangle\\&<\sigma d^2(x_{i_j},\mathcal{P}_K(\exp_{x_{i_j}}(-\mu\xi_{i_j})))\end{aligned} \tag{6.40}$$

若 $j\to\infty$, 则 $\gamma_{i_j}(\gamma^{-1}\eta_{i_j})\to\overline{x}$. 由于 $\overline{\xi}\in F(\overline{x})$, 故 F 的下半连续性意味着存在 $\overline{\xi_{i_j}}\in F(\gamma_{i_j}(\gamma^{-1}\eta_{i_j}))$ 使得 $\overline{\xi_{i_j}}$ 收敛于 $\overline{\xi}$. 由式 (6.40) 可得

$$\begin{aligned}&\langle\overline{\xi_{i_j}},-P_{\gamma_{i_j}(\gamma^{-1}\eta_{i_j}),x_{i_j}}\exp^{-1}_{x_{i_j}}[\mathcal{P}_K(\exp_{x_{i_j}}(-\mu\xi_{i_j}))]\rangle\\&<\sigma d^2(x_{i_j},\mathcal{P}_K(\exp_{x_{i_j}}(-\mu\xi_{i_j})))\end{aligned} \tag{6.41}$$

在式 (6.41) 中令 $j\to\infty$, 由引理 1.46 可得

$$\langle\overline{\xi},-\exp^{-1}_{\overline{x}}[\mathcal{P}_K(\exp_{\overline{x}}(-\mu\overline{\xi}))]\rangle\leqslant\sigma d^2(\overline{x},\mathcal{P}_K(\exp_{\overline{x}}(-\mu\overline{\xi})))$$

即

$$\langle\overline{\xi},-r_\mu(\overline{x},\overline{\xi})\rangle\leqslant\sigma d^2(\overline{x},\mathcal{P}_K(\exp_{\overline{x}}(-\mu\overline{\xi})))\tag{6.42}$$

由于 $\mu < 1/\sigma$, 故由式 (6.22) 和式 (6.42), 可得

$$d(\overline{x}, \mathcal{P}_K(\exp_{\overline{x}}(-\mu\overline{\xi}))) = 0$$

因此, $\overline{x} \in S$. 证毕.

下面考虑算法 6.1 的两个应用.

对给定的 $x \in K$ 和 $\xi \in F(x)$, 令 $R_\mu(x, \xi) := x - \mathcal{P}_K(x - \mu\xi) = 0$.

若 $\mathbb{M} = \mathbb{R}^n$, 则算法 6.1 退化成求解问题 (6.20) 的如下形式.

算法 6.2 选取 $x_0 \in K$ 及参数 $\sigma > 0, \mu \in (0, 1/\sigma), \theta \in (0, 1)$. 令 $i = 0$.

步骤 1. 对某个 $\xi \in F(x_i)$, 若 $R_\mu(x_i, \xi) = 0$, 则停止; 否则任取 $\xi_i \in F(x_i)$.

步骤 2. 令 k_i 是所有满足下面条件的最小非负整数 k:

$$\sup\{\langle y, R_\mu(x_i, \xi_i)\rangle : y \in F(x_i - \theta^k R_\mu(x_i, \xi_i))\} \geqslant \sigma \|R_\mu(x_i, \xi_i)\|^2 \tag{6.43}$$

记 $\eta_i = \theta^{k_i}$, $z_i = x_i - \eta_i R_\mu(x_i, \xi_i)$.

步骤 3. 计算 $x_{i+1} := \mathcal{P}_{K \cap H_i}(x_i)$, 其中

$$H_i := \{x \in \mathbb{R}^n : \sup\{\langle \xi, x - z_i\rangle : \xi \in F(z_i)\} \leqslant 0\} \tag{6.44}$$

令 $i := i + 1$, 然后转至步骤 1.

注解 6.1 利用引理 4.2, 不等式 (6.43) 等价于

$$\inf\{\langle \xi_i - y, R_\mu(x_i, \xi_i)\rangle : y \in F(x_i - \theta^k R_\mu(x_i, \xi_i))\} \leqslant (\mu^{-1} - \sigma)\|R_\mu(x_i, \xi_i)\|^2$$

定理 6.19 设 $F : K \to 2^{\mathbb{R}^n}$ 是连续的、伪单调的, 且在 K 上具有非空紧凸值的集值映射, 则算法 6.2 要么在有限步迭代后终止, 要么产生一个无穷序列 $\{x_i\}$, 并且该序列收敛于问题 (6.20) 的一个解.

如果 $F : K \to T\mathbb{M}$ 是一单值向量场. 记

$$r_\mu(x) := \exp_x^{-1} \mathcal{P}_K(\exp_x(-\mu F(x)))$$

则算法 6.1 退化成求解问题 (6.21) 的如下算法.

算法 6.3 选取 $x_0 \in K$ 及参数 $\sigma > 0, \mu \in (0, 1/\sigma), \theta \in (0, 1)$. 令 $i = 0$.

步骤 1. 若 $r_\mu(x_i) = 0$, 则停止; 否则定义

$$\gamma_i(t) = \exp_{x_i} t \exp_{x_i}^{-1}[\mathcal{P}_K(\exp_{x_i}(-\mu F(x_i)))] \tag{6.45}$$

步骤 2. 令 k_i 是所有满足下面条件的最小非负整数 k:

$$\langle F(\gamma_i(\theta^k)), -\gamma_i'(\theta^k)\rangle \geqslant \sigma d^2(x_i, \mathcal{P}_K(\exp_{x_i}(-\mu F(x_i)))) \tag{6.46}$$

记 $\eta_i = \theta^{k_i}$, $z_i = \gamma_i(\eta_i)$.

步骤 3. 计算 $x_{i+1} := \mathcal{P}_{K\cap H_i}(x_i)$, 其中

$$H_i := \{x \in \mathbb{M} : \langle F(z_i), \exp_{z_i}^{-1} x\rangle \leqslant 0\} \tag{6.47}$$

令 $i := i+1$, 然后转至步骤 1.

定理 6.20 设 $F : K \to T\mathbb{M}$ 是一连续伪单调向量场, 问题 (6.21) 的解集 S 非空. 那么算法 6.3 要么在有限步迭代后终止, 要么产生一个无穷序列 $\{x_i\}$ 且收敛于问题 (6.21) 的解.

当 $\mathbb{M} = \mathbb{R}^n$ 时, 下面的例子给出了算法 6.1 的数值结果.

例 6.1 设 $\mathbb{M} = \mathbb{R}^4$, $K := \{x = (x_1, x_2, x_3, x_4)^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^4_+ : x^{\mathrm{T}} z = 1\}$, 其中 $z = (1,1,1,1)^{\mathrm{T}}$. 设 $F : K \to 2^{\mathbb{R}^4}$, 且

$$F(x) := \{tz - y : t \in [0,1]\}$$

其中, $y = (0, x_1, x_2, x_3)^{\mathrm{T}}$. 那么集合 K 和映射 F 满足假设条件, 并且 (0,0,0,1) 是变分不等式 (6.20) 的解.

应用 MATLAB 软件, 我们得到了算法 6.1 的如下数值结果. 容许度 ε 意味着当 $\|R_\mu(x,w)\| \leqslant \varepsilon$ 时, 程序停止. 我们选取 $\varepsilon = 10^{-5}$, $\mu = 1$, 初始点 $x_0 = (0.3, 0.4, 0.3, 0) \in K$(参见表 6.1).

表 6.1　随着参数 σ 和 γ 的改变, 算法 6.1 所需的迭代数

σ	0.2	0.4	0.6	0.8	0.95
$\gamma = 0.3$	19	19	65	65	231
$\gamma = 0.5$	19	19	39	79	327
$\gamma = 0.9$	19	19	26	50	208

从表 6.1 可以看出, 所需的迭代数目随着 σ 的增大而增大.

第 7 章　Gap-泛函与正规映射

本章首先介绍了集值变分不等式的三类 Gap-泛函，即自然残余 Gap-泛函、正则 Gap-泛函和对偶 Gap-泛函, 并利用这三类 Gap-泛函，建立了集值变分不等式解集合相应的误差界。同时，介绍了混合变分不等式问题所产生的不动点映射和正规映射，并证明了与混合变分不等式有关的不动点映射和正规映射的单调性及强单调性, 以及带有扰动的不动点映射和正规映射的强单调性.

7.1　集值变分不等式的 Gap-泛函

设 K 是 $\mathbb{R}^n$ 的非空闭凸子集，$T: K \to 2^{\mathbb{R}^n}$ 为集值映射, $\mathcal{P}_K$ 表示 $\mathbb{R}^n$ 到 K 上的投影算子. 回顾第 4 章所考虑集值变分不等式问题：求 $x^* \in K, \xi \in T(x^*)$ 使得

$$\langle \xi, y - x^* \rangle \geqslant 0, \forall y \in K \tag{7.1}$$

其中, $T: K \to 2^{\mathbb{R}^n}$ 是连续的且具有非空紧值的集值映射.

下面给出变分不等式问题 (7.1) 的 Gap-泛函的定义.

定义 7.1　称泛函 $M: \mathbb{R}^n \to (-\infty, +\infty]$ 为变分不等式问题 (7.1) 的 Gap-泛函, 如果 M 满足

(i) $M(x) \geqslant 0, \forall x \in \mathbb{R}^n$;

(ii) $M(x^*) = 0$ 当且仅当 $x^* \in K$ 是变分不等式问题 (7.1) 的解.

我们需要下面的假定：

$$\langle \zeta, y - x \rangle \geqslant \lambda \|y - x\|^2, \quad \forall y \in K, \zeta \in T(y), x \in \mathrm{MVIP}(T, K) \tag{7.2}$$

其中, $\lambda > 0$ 为常数, $\mathrm{MVIP}(T, K)$ 表示变分不等式问题 (7.1) 的解集合.

容易看出, 如果 T 是强单调的, 则 T 满足假定 (7.2).

定义自然残余 Gap- 泛函：

$$g_\mu(x) := \inf_{\xi \in T(x)} \|R_\mu(x, \xi)\| = \inf_{\xi \in T(x)} \|x - \mathcal{P}_K(x - \mu\xi)\|, \quad x \in K$$

根据引理 4.1 可知, $g_\mu(x)$ 为变分不等式问题 (7.1) 的 Gap-泛函.

根据引理 1.1 和引理 4.1, 我们有下面的误差界.

定理 7.1 设 $x^* \in \mathrm{MVIP}(T, K)$,$T : K \to 2^{\mathbb{R}^n}$ 为 δ-Lipschitz 连续的和 γ-强单调的, 则

$$\|x - x^*\| \leqslant ((\mu + \delta)/\gamma) g_\mu(x), \quad \forall x \in K, \mu > 0$$

证明 由于 $x^* \in \mathrm{MVIP}(T, K)$, 所以存在 $\xi_1 \in T(x^*)$ 满足

$$\langle \xi_1, y - x^* \rangle \geqslant 0, \quad \forall y \in K \tag{7.3}$$

对 $\forall x \in K$ 和 $\forall \xi \in T(x)$, 在式 (7.3) 中令 $y = \mathcal{P}_K(x - \mu^{-1}\xi)$ 有

$$\langle \xi_1, \mathcal{P}_K(x - \mu^{-1}\xi) - x^* \rangle \geqslant 0 \tag{7.4}$$

在式 (1.1) 中令 $z = x - \mu^{-1}\xi, u = \mathcal{P}_K(x - \mu^{-1}\xi), v = x^*$ 有

$$\langle \mu^{-1}\xi + \mathcal{P}_K(x - \mu^{-1}\xi) - x, x^* - \mathcal{P}_K(x - \mu^{-1}\xi) \rangle \geqslant 0 \tag{7.5}$$

由式 (7.4) 和式 (7.5) 有

$$\langle (\xi_1 - \xi) + \mu(x - \mathcal{P}_K(x - \mu^{-1}\xi)), \mathcal{P}_K(x - \mu^{-1}\xi) - x^* \rangle \geqslant 0$$

所以

$$\langle \xi_1 - \xi, x^* - \mathcal{P}_K(x - \mu^{-1}\xi) \rangle \leqslant \mu \langle x - \mathcal{P}_K(x - \mu^{-1}\xi), \mathcal{P}_K(x - \mu^{-1}\xi) - x^* \rangle \tag{7.6}$$

由式 (7.6) 和 T 的强单调性有

$$\begin{aligned}
\gamma\|x - x^*\|^2 \leqslant & \langle \xi_1 - \xi, x^* - x \rangle \\
= & \langle \xi_1 - \xi, x^* - \mathcal{P}_K(x - \mu^{-1}\xi) \rangle + \langle \xi_1 - \xi, \mathcal{P}_K(x - \mu^{-1}\xi) - x \rangle \\
\leqslant & \mu \langle x - \mathcal{P}_K(x - \mu^{-1}\xi), \mathcal{P}_K(x - \mu^{-1}\xi) - x^* \rangle + \langle \xi_1 - \xi, \mathcal{P}_K(x - \mu^{-1}\xi) - x \rangle \\
= & -\mu\|R_\mu(x, \xi)\|^2 + \mu\langle x - \mathcal{P}_K(x - \mu^{-1}\xi), x - x^* \rangle + \langle \xi_1 - \xi, \mathcal{P}_K(x - \mu^{-1}\xi) - x \rangle \\
\leqslant & \mu\|R_\mu(x, \xi)\|\|x - x^*\| + \|R_\mu(x, \xi)\|\|\xi_1 - \xi\| \leqslant (\mu + \delta)\|R_\mu(x, \xi)\|\|x - x^*\|
\end{aligned}$$

所以

$$\|x - x^*\| \leqslant ((\mu + \delta)/\gamma)\|R_\mu(x, \xi)\|, \quad \forall x \in K, \xi \in T(x)$$

故

$$\|x - x^*\| \leqslant ((\mu + \delta)/\gamma) \inf_{\xi \in T(x)} \|R_\mu(x, \xi)\| = ((\mu + \delta)/\gamma) g_\mu(x), \quad \forall x \in K$$

定义正则 Gap-泛函 $f_\alpha : K \to R$ 为

$$f_\alpha(x) := \sup_{y \in K} \inf_{\xi \in T(x)} \left\{ \langle \xi, x - y \rangle - \frac{\alpha}{2}\|y - x\|^2 \right\}, \quad \alpha > 0$$

定理 7.2 对 $\forall x\in K, f_\alpha(x)\geqslant 0$; 对 $x\in K, f_\alpha(x)=0$ 当且仅当 x 满足变分不等式问题 (7.1).

证明

$$\begin{aligned}f_\alpha(x)&=\sup_{y\in K}\inf_{\xi\in T(x)}\left\{\langle\xi,x-y\rangle-\frac{\alpha}{2}\|y-x\|^2\right\}\\&=\inf_{\xi\in T(x)}\sup_{y\in K}\left\{\langle\xi,x-y\rangle-\frac{\alpha}{2}\|y-x\|^2\right\}\\&=\frac{\alpha}{2}\inf_{\xi\in T(x)}\sup_{y\in K}\{\|\alpha^{-1}\xi\|^2-\|\alpha^{-1}\xi-(x-y)\|^2\}\\&=\frac{\alpha}{2}\inf_{\xi\in T(x)}\{\|\alpha^{-1}\xi\|^2-\inf_{y\in K}\|\alpha^{-1}\xi-(x-y)\|^2\}\\&=\frac{\alpha}{2}\inf_{\xi\in T(x)}\{\|\alpha^{-1}\xi\|^2-\mathrm{dist}^2(x-\alpha^{-1}\xi,K)\}\end{aligned}$$

由于 $T(x)$ 是紧的, 所以 $f_\alpha(x)=0$ 当且仅当存在 $\xi\in T(x)$ 使得 $\|\alpha^{-1}\xi\|=\mathrm{dist}(x-\alpha^{-1}\xi,K)$, 这又等价于 $x=\mathcal{P}_K(x-\alpha^{-1}\xi)$.

定理 7.3 设 $T:K\to 2^{\mathbb{R}^n}$ 是具有非空紧值的连续映射且满足假定 (7.2), $\lambda>\dfrac{\alpha}{2}, x^*\in S$. 则

$$\|x-x^*\|\leqslant\sqrt{\frac{2}{2\lambda-\alpha}}\cdot\sqrt{f_\alpha(x)},\quad \forall x\in K$$

证明 因为 $x^*\in K$, 所以

$$f_\alpha(x)=\sup_{y\in K}\inf_{\xi\in T(x)}\left\{\langle\xi,x-y\rangle-\frac{\alpha}{2}\|y-x\|^2\right\}\geqslant\inf_{\xi\in T(x)}\left\{\langle\xi,x-x^*\rangle-\frac{\alpha}{2}\|x^*-x\|^2\right\}$$

由于 $T(x)$ 是紧的, 所以存在 $\zeta\in T(x)$ 使得

$$f_\alpha(x)\geqslant\inf_{\xi\in T(x)}\left\{\langle\xi,x-x^*\rangle-\frac{\alpha}{2}\|x^*-x\|^2\right\}=\langle\zeta,x-x^*\rangle-\frac{\alpha}{2}\|x-x^*\|^2$$

从而由假定 (7.2) 有

$$f_\alpha(x)\geqslant\lambda\|x-x^*\|^2-\frac{\alpha}{2}\|x-x^*\|^2=\left(\lambda-\frac{\alpha}{2}\right)\|x-x^*\|^2$$

所以

$$\|x-x^*\|\leqslant\sqrt{\frac{2}{2\lambda-\alpha}}\cdot\sqrt{f_\alpha(x)}$$

定义对偶 Gap-泛函 $T_{\alpha\beta}:K\to\mathbb{R}$ 为

$$T_{\alpha\beta}(x):=f_\alpha(x)-f_\beta(x),\quad \beta>\alpha>0$$

定理 7.4　设 $\beta > \alpha > 0$, 则对 $\forall x \in K, T_{\alpha\beta}(x) \geqslant 0$; $T_{\alpha\beta}(x) = 0$ 当且仅当 x 满足变分不等式问题 (7.1).

证明

$$\begin{aligned}T_{\alpha\beta}(x) &= f_\alpha(x) - f_\beta(x)\\ &= \inf_{\xi\in T(x)}\{\langle \xi, x - \mathcal{P}_K(x-\alpha^{-1}\xi)\rangle - \frac{\alpha}{2}\|\mathcal{P}_K(x-\alpha^{-1}\xi) - x\|^2\}\\ &\quad - \inf_{\xi\in T(x)}\{\langle \xi, x - \mathcal{P}_K(x-\beta^{-1}\xi)\rangle - \frac{\beta}{2}\|\mathcal{P}_K(x-\beta^{-1}\xi) - x\|^2\}\end{aligned}$$

由于 $T(x)$ 是紧的, 所以存在 $\zeta_1 \in T(x)$ 使得

$$\begin{aligned}&\inf_{\xi\in T(x)}\{\langle \xi, x - \mathcal{P}_K(x-\alpha^{-1}\xi)\rangle - \frac{\alpha}{2}\|\mathcal{P}_K(x-\alpha^{-1}\xi) - x\|^2\}\\ =&\langle \zeta_1, x - \mathcal{P}_K(x-\alpha^{-1}\zeta_1)\rangle - \frac{\alpha}{2}\|\mathcal{P}_K(x-\alpha^{-1}\zeta_1) - x\|^2\end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}T_{\alpha\beta}(x) \geqslant& \langle \zeta_1, x - \mathcal{P}_K(x-\alpha^{-1}\zeta_1)\rangle - \frac{\alpha}{2}\|\mathcal{P}_K(x-\alpha^{-1}\zeta_1) - x\|^2\\ &-\langle \zeta_1, x - \mathcal{P}_K(x-\beta^{-1}\zeta_1)\rangle + \frac{\beta}{2}\|\mathcal{P}_K(x-\beta^{-1}\zeta_1) - x\|^2\\ =&\langle \zeta_1, \mathcal{P}_K(x-\beta^{-1}\zeta_1) - \mathcal{P}_K(x-\alpha^{-1}\zeta_1)\rangle\\ &-\frac{\alpha}{2}\|\mathcal{P}_K(x-\alpha^{-1}\zeta_1) - x\|^2 + \frac{\beta}{2}\|\mathcal{P}_K(x-\beta^{-1}\zeta_1) - x\|^2\\ =&\langle \zeta_1, R_{\alpha^{-1}}(x,\zeta_1) - R_{\beta^{-1}}(x,\zeta_1)\rangle\\ &-\frac{\alpha}{2}\|R_{\alpha^{-1}}(x,\zeta_1)\|^2 + \frac{\beta}{2}\|R_{\beta^{-1}}(x,\zeta_1)\|^2\end{aligned}\tag{7.7}$$

在式 (1.1) 中令 $v = \mathcal{P}_K(x-\beta^{-1}\zeta_1), z = x - \alpha^{-1}\zeta_1, u = \mathcal{P}_K(x-\alpha^{-1}\zeta_1)$ 有

$$\langle \mathcal{P}_K(x-\alpha^{-1}\zeta_1) - x + \alpha^{-1}\zeta_1, \mathcal{P}_K(x-\beta^{-1}\zeta_1) - \mathcal{P}_K(x-\alpha^{-1}\zeta_1)\rangle \geqslant 0$$

即

$$\langle \zeta_1, R_{\alpha^{-1}}(x,\zeta_1) - R_{\beta^{-1}}(x,\zeta_1)\rangle \geqslant \alpha\langle R_{\alpha^{-1}}(x,\zeta_1), R_{\alpha^{-1}}(x,\zeta_1) - R_{\beta^{-1}}(x,\zeta_1)\rangle \tag{7.8}$$

由式 (7.7) 和式 (7.8) 有

$$\begin{aligned}T_{\alpha\beta}(x) \geqslant& \alpha\langle R_{\alpha^{-1}}(x,\zeta_1), R_{\alpha^{-1}}(x,\zeta_1) - R_{\beta^{-1}}(x,\zeta_1)\rangle\\ &-\frac{\alpha}{2}\|R_{\alpha^{-1}}(x,\zeta_1)\|^2 + \frac{\beta}{2}\|R_{\beta^{-1}}(x,\zeta_1)\|^2\\ =&\frac{\alpha}{2}\|R_{\alpha^{-1}}(x,\zeta_1) - R_{\beta^{-1}}(x,\zeta_1)\|^2\\ &+\frac{\beta-\alpha}{2}\|R_{\beta^{-1}}(x,\zeta_1)\|^2\end{aligned}$$

$$\geqslant \frac{\beta-\alpha}{2}\|R_{\beta^{-1}}(x,\zeta_1)\|^2 \tag{7.9}$$

由式 (7.9) 可知 $\forall x\in K, T_{\alpha\beta}(x)\geqslant 0$, 且若 $T_{\alpha\beta}(x)=0$, 则 $R_{\beta^{-1}}(x,\zeta_1)=0$, 从而由引理 4.1 可知 $x\in K,\zeta_1\in T(x)$ 满足变分不等式问题 (7.1) 若 x 满足变分不等式问题 (7.1), 则由定理 7.2 可知 $T_{\alpha\beta}(x)=f_\alpha(x)-f_\beta(x)=0$.

由定理 7.1 和式 (7.9), 我们有下面的误差界.

定理 7.5 设 $x^*\in \mathrm{MVIP}(T,K)$,$T:K\to 2^{\mathbb{R}^n}$ 为 δ-Lipschitz 连续的和 γ-强单调的, $\beta>\alpha>0$, 则

$$\|x-x^*\|\leqslant \frac{1+\beta\delta}{\beta\gamma}\sqrt{\frac{2}{\beta-\alpha}}\sqrt{T_{\alpha\beta}(x)},\quad \forall x\in K$$

证明 由式 (7.9) 知, 对 $\forall x\in K$, 存在 $\zeta_1\in T(x)$ 使得

$$\|R_{\beta^{-1}}(x,\zeta_1)\|\leqslant \sqrt{\frac{2}{\beta-\alpha}}\sqrt{T_{\alpha\beta}(x)}$$

由定理 7.1 有

$$\|x-x^*\|\leqslant \frac{1+\beta\delta}{\beta\gamma}\|R_{\beta^{-1}}(x,\zeta_1)\|$$

从而

$$\|x-x^*\|\leqslant \frac{1+\beta\delta}{\beta\gamma}\sqrt{\frac{2}{\beta-\alpha}}\sqrt{T_{\alpha\beta}(x)},\quad \forall x\in K$$

7.2 混合变分不等式的正规映射

设 $T:H\to H$ 是单值映射, $\varphi:H\to\mathbb{R}\cup\{+\infty\}$ 是真凸下半连续泛函.

考虑如下混合变分不等式问题: 寻求 $x\in\mathrm{dom}\varphi$ 使得

$$\langle T(x),y-x\rangle+\varphi(y)-\varphi(x)\geqslant 0,\quad \forall y\in H \tag{7.10}$$

其中, $\mathrm{dom}\varphi=\{z\in H:\varphi(z)<\infty\}$.

变分不等式问题 (7.10) 的不动点方程和正规方程分别为

$$\pi_\alpha(x)=x-J_\alpha^\varphi(x-\alpha T(x))=0 \tag{7.11}$$

和

$$\varPhi_\alpha(x)=T(J_{1/\alpha}^\varphi(x))+\alpha(x-J_{1/\alpha}^\varphi(x))=0 \tag{7.12}$$

其中, $J_\alpha^\varphi=(I+\alpha\partial\varphi)^{-1}$ 是近似点映射，I是恒等映射，$\partial\varphi(x)$ 是φ在x的次梯度, 即

$$\partial\varphi(x)=\begin{cases}\{\omega\in H:\langle\omega,y-x\rangle\leqslant\varphi(y)-\varphi(x),\quad\forall y\in H\}, & x\in\mathrm{dom}\varphi\\ \varnothing, & x\notin\mathrm{dom}\varphi\end{cases}$$

当 $H=\mathbb{R}^n$,K 是 $\mathbb{R}^n$ 中的闭凸集时，设 $T:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ 是连续泛函，如果对每一 $x\in\mathbb{R}^n$, $\varphi(x)$ 是 K 的指示泛函, 即

$$\varphi(x)\equiv I_K(x)=\begin{cases}0, & x\in K\\ +\infty, & x\notin K\end{cases}$$

则变分不等式问题 (7.10) 变为求 $x^*\in K$ 使得

$$\langle T(x^*),x-x^*\rangle\geqslant 0,\quad\forall x\in K\tag{7.13}$$

变分不等式问题 (7.13) 的不动点方程和正规方程分别为

$$\pi_\alpha(x)=x-\mathcal{P}_K(x-\alpha T(x))=0$$

和

$$\Phi_\alpha(x)=T(\mathcal{P}_K(x))+\alpha(x-\mathcal{P}_K(x))=0$$

其中, $\alpha>0$ 是常数，$\mathcal{P}_K(\cdot)$ 表示到 K 上的投影算子.

记

$$P_\alpha=J_\alpha^\varphi=(I+\alpha\partial\varphi)^{-1},\quad Q_\alpha=I-P_\alpha\tag{7.14}$$

为得到本节的主要结果，需要下面的两个引理.

引理 7.6　(i) $z=P_\alpha(z)+Q_\alpha(z)$ 且 $\alpha^{-1}Q_\alpha(z)\in\partial\varphi(P_\alpha(z))$, $\forall z\in H$;

(ii) $\langle P_\alpha(z)-P_\alpha(z'),Q_\alpha(z)-Q_\alpha(z')\rangle\geqslant 0$, $\forall z,z'\in H$.

证明　(i) 由式 (7.14) 得 $z=P_\alpha(z)+Q_\alpha(z),\forall z\in H$. 下面证明第二个结论: 对任何 $z\in H$, 令 $y=Q_\alpha(z)$, 则

$$y=Q_\alpha(z)=z-P_\alpha(z)=z-(I+\alpha\partial\varphi)^{-1}(z)$$

从而

$$z-y=(I+\alpha\partial\varphi)^{-1}(z)=P_\alpha(z)$$

故

$$z\in(I+\alpha\partial\varphi)(z-y)$$

即

$$y \in \alpha\partial\varphi(z-y) = \alpha\partial\varphi(P_\alpha(z))$$

也即

$$Q_\alpha(z) \in \alpha\partial\varphi(P_\alpha(z))$$

从而

$$\alpha^{-1}Q_\alpha(z) \in \partial\varphi(P_\alpha(z))$$

(ii) 由 (i) 及 $\partial\varphi(\cdot)$ 的单调性有

$$\langle P_\alpha(z) - P_\alpha(z'), \alpha^{-1}Q_\alpha(z) - \alpha^{-1}Q_\alpha(z')\rangle \geqslant 0, \quad \forall z, z' \in H$$

即

$$\langle P_\alpha(z) - P_\alpha(z'), Q_\alpha(z) - Q_\alpha(z')\rangle \geqslant 0, \quad \forall z, z' \in H$$

引理 7.7 (i) 记 $Q_z = Q_\alpha(z) = z - P_\alpha(z), \quad \forall z \in H$, 则

$$\langle z - w, Q_z - Q_w\rangle \geqslant \| Q_z - Q_w \|^2, \quad \forall z, w \in H \tag{7.15}$$

(ii) 任给常数 $\alpha > 0$ 及 $u \in H$, 下面不等式恒成立:

$$\alpha \| v \|^2 + \langle v, u\rangle \geqslant -\frac{\| u \|^2}{4\alpha}, \quad \forall v \in H \tag{7.16}$$

证明 (i) 由引理 7.6, 对 $\forall z, w \in H$, 有

$$\begin{aligned}\langle z - w, Q_z - Q_w\rangle &= \langle (P_\alpha(z) + Q_\alpha(z)) - (P_\alpha(w) + Q_\alpha(w)), Q_z - Q_w\rangle \\ &= \langle (P_\alpha(z) - P_\alpha(w)) + (Q_\alpha(z) - Q_\alpha(w)), Q_z - Q_w\rangle \\ &= \langle P_\alpha(z) - P_\alpha(w), Q_\alpha(z) - Q_\alpha(w)\rangle + \| Q_z - Q_w \|^2 \\ &\geqslant \| Q_z - Q_w \|^2\end{aligned}$$

(ii) 对 $\forall u, v \in H$ 有

$$\| 2\alpha v + u \|^2 \geqslant 0$$

所以

$$4\alpha^2\|v\|^2 + 4\alpha\langle v, u\rangle + \|u\|^2 \geqslant 0$$

即

$$4\alpha^2\|v\|^2 + 4\alpha\langle v, u\rangle \geqslant -\|u\|^2$$

又 $\alpha > 0$, 故

$$\alpha \| v \|^2 + \langle v, u\rangle \geqslant -\frac{\| u \|^2}{4\alpha}$$

下面的结果分别给出了不动点映射 π_α 和正规映射 Φ_α 的零点与变分不等式问题 (7.10) 的解之间的关系.

定理 7.8　(i) x^* 是变分不等式问题 (7.10) 的解当且仅当 $\pi_\alpha(x^*) = 0$.

(ii) 若 x^* 是变分不等式问题 (7.10) 的解, 则 $x^* - \dfrac{1}{\alpha}T(x^*)$ 是 $\Phi_\alpha(x) = 0$ 的解; 反之, 若 $\Phi_\alpha(x^*) = 0$, 则 $J^{\varphi}_{1/\alpha}(x^*)$ 是变分不等式问题 (7.10) 的解.

证明　(i) $\pi_\alpha(x^*) = 0$ 等价于

$$x^* = J^{\varphi}_{\alpha}(x^* - \alpha T(x^*))$$

等价于

$$x^* = (I + \alpha\partial\varphi)^{-1}(x^* - \alpha T(x^*))$$

等价于

$$x^* - \alpha T(x^*) \in x^* + \alpha\partial\varphi(x^*)$$

等价于

$$-T(x^*) \in \partial\varphi(x^*)$$

等价于

$$\langle T(x^*), y - x^*\rangle + \varphi(y) - \varphi(x^*) \geqslant 0, \quad \forall y \in H$$

即 x^* 是变分不等式问题 (7.10) 的解.

(ii) 若 x^* 是变分不等式问题 (7.10) 的解, 则由 (i) 有

$$x^* = J^{\varphi}_{1/\alpha}\left(x^* - \frac{1}{\alpha}T(x^*)\right)$$

从而

$$\begin{aligned}
\Phi_\alpha\left(x^* - \frac{1}{\alpha}T(x^*)\right) =& T\left(J^{\varphi}_{1/\alpha}\left(x^* - \frac{1}{\alpha}T(x^*)\right)\right) \\
&+\alpha\left(x^* - \frac{1}{\alpha}T(x^*) - J^{\varphi}_{1/\alpha}\left(x^* - \frac{1}{\alpha}T(x^*)\right)\right) \\
=& T(x^*) + \alpha\left(x^* - J^{\varphi}_{1/\alpha}\left(x^* - \frac{1}{\alpha}T(x^*)\right) - \frac{1}{\alpha}T(x^*)\right) \\
=& T(x^*) - \alpha \cdot \frac{1}{\alpha}T(x^*) = 0
\end{aligned}$$

即 $x^* - \dfrac{1}{\alpha}T(x^*)$ 是 $\Phi_\alpha(x) = 0$ 的解.

反之, 若 $\Phi_\alpha(x^*)=0$, 则

$$T(J^{\varphi}_{1/\alpha}(x^*))+\alpha(x^*-J^{\varphi}_{1/\alpha}(x^*))=0$$

从而

$$-T(J^{\varphi}_{1/\alpha}(x^*))=\alpha(x^*-J^{\varphi}_{1/\alpha}(x^*))$$

即

$$-T(P_{1/\alpha}(x^*))=\alpha Q_{1/\alpha}(x^*)$$

由引理 2.1(i) 有

$$-T(P_{1/\alpha}(x^*))\in\partial\varphi(P_{1/\alpha}(x^*))$$

从而 $P_{1/\alpha}(x^*)$ 是变分不等式问题 (7.10) 的解, 也即 $J^{\varphi}_{1/\alpha}(x^*)$ 是变分不等式问题 (7.10) 的解.

接下来我们介绍扰动不动点映射和扰动正规映射的概念.

定义 7.2 扰动不动点映射为

$$\pi_{\alpha,\varepsilon}(x):=x-J^{\varphi}_{\alpha}(x-\alpha(T(x)+\varepsilon x))$$

扰动正规映射为

$$\Phi_{\alpha,\varepsilon}(x):=T(J^{\varphi}_{1/\alpha}(x))+\varepsilon J^{\varphi}_{1/\alpha}(x)+\alpha(x-J^{\varphi}_{1/\alpha}(x))$$

由定义 7.2 可知

$$\pi_{\alpha,0}(x)=\pi_\alpha(x),\quad \Phi_{\alpha,0}(x)=\Phi_\alpha(x),\quad \forall x\in H$$

定理 7.9 设 $T:H\to H$ 是单值映射,$\varepsilon\geqslant 0,\alpha,\beta,\gamma,\delta$ 均为正数.

(i) 如果 T 是 γ-余强制的, 则当 $0<\alpha\leqslant 4\gamma$ 时, 不动点映射 $\pi_\alpha(\cdot)$ 是单调的;

(ii) 如果 T 是 β-强单调的和 δ-Lipschitz 连续的, 则当 $0<\alpha<4\beta/\delta^2$ 时, 不动点映射 $\pi_\alpha(\cdot)$ 是强单调的;

(iii) 如果 T 是 γ-余强制的, 则当 $0<\alpha\leqslant 4\gamma$ 及 $0<\varepsilon\leqslant 2\left(\dfrac{1}{\alpha}-\dfrac{1}{4\gamma}\right)$ 时, 扰动不动点映射 $\pi_{\alpha,\varepsilon}(\cdot)$ 是强单调的.

证明 令 $\alpha>0$ 及 $0\leqslant\varepsilon\leqslant 2/\alpha$, 记

$$z=x-\alpha(T(x)+\varepsilon x),\quad w=y-(T(y)+\varepsilon y),\quad \forall x,y\in H$$

及

$$Q_z=Q_\alpha(z)=z-P_\alpha(z),\quad \forall z\in H$$

从而由引理 7.7 有

$$
\begin{aligned}
&\langle x-y,\pi_{\alpha,\varepsilon}(x)-\pi_{\alpha,\varepsilon}(y)\rangle \\
=&\langle x-y,[(z-J_\alpha^\varphi(z))-(w-J_\alpha^\varphi(w))] \\
&+[(\alpha(T(x)+\varepsilon x)-\alpha(T(y)+\varepsilon y)]\rangle \\
=&\langle x-y,Q_z-Q_w\rangle+\alpha\varepsilon\|x-y\|^2 \\
&+\alpha\langle x-y,T(x)-T(y)\rangle \\
=&\langle [z+\alpha(T(x)+\varepsilon x)]-[w+\alpha(T(y)+\varepsilon y)],Q_z-Q_w\rangle \\
&+\alpha\varepsilon\|x-y\|^2+\alpha\langle x-y,T(x)-T(y)\rangle \\
=&\langle z-w,Q_z-Q_w\rangle+\alpha\langle [(T(x)+\varepsilon x)-(T(y)+\varepsilon y)],Q_z-Q_w\rangle \\
&+\alpha\varepsilon\|x-y\|^2+\alpha\langle x-y,T(x)-T(y)\rangle \\
\geqslant&\|Q_z-Q_w\|^2+\alpha\langle [(T(x)+\varepsilon x)-(T(y)+\varepsilon y)],Q_z-Q_w\rangle \\
&+\alpha\varepsilon\|x-y\|^2+\alpha\langle x-y,T(x)-T(y)\rangle \\
\geqslant&-(\alpha^2/4)\|(T(x)+\varepsilon x)-(T(y)+\varepsilon y)\|^2 \\
&+\alpha\varepsilon\|x-y\|^2+\alpha\langle x-y,T(x)-T(y)\rangle \\
=&(\alpha\varepsilon-\alpha^2\varepsilon^2/4)\|x-y\|^2-(\alpha^2/4)\|T(x)-T(y)\|^2 \\
&+(\alpha-\alpha^2\varepsilon/2)\langle x-y,T(x)-T(y)\rangle
\end{aligned}
\tag{7.17}
$$

(i) 如果 T 是 γ-余强制的，则由式 (7.17) 有

$$
\begin{aligned}
&\langle x-y,\pi_{\alpha,\varepsilon}(x)-\pi_{\alpha,\varepsilon}(y)\rangle \\
\geqslant&(\alpha\varepsilon-\alpha^2\varepsilon^2/4)\|x-y\|^2-(\alpha^2/4)\|T(x)-T(y)\|^2 \\
&+\gamma(\alpha-\alpha^2\varepsilon/2)\|T(x)-T(y)\|^2 \\
=&\alpha\varepsilon(1-\alpha\varepsilon/4)\|x-y\|^2 \\
&+\alpha^2\gamma\left(\frac{1}{\alpha}-\frac{1}{4\gamma}-\frac{\varepsilon}{2}\right)\|T(x)-T(y)\|^2
\end{aligned}
\tag{7.18}
$$

在式 (7.18) 中令 $\varepsilon=0$, 则当 $0<\alpha\leqslant 4\gamma$ 时, 有

$$\langle x-y,\pi_\alpha(x)-\pi_\alpha(y)\rangle\geqslant 0$$

即此时 $\pi_\alpha(\cdot)$ 是单调的.

(ii) 如果 T 是 β-强单调的和 δ-Lipschitz 连续的, 在式 (7.17) 中令 $\varepsilon=0$ 有

$$\begin{aligned}
&\langle x-y,\pi_\alpha(x)-\pi_\alpha(y)\rangle\\
&\geqslant -(\alpha^2/4)\|T(x)-T(y)\|^2+\alpha\langle x-y,T(x)-T(y)\rangle\\
&\geqslant -(\alpha^2\delta^2/4)\|x-y\|^2+\alpha\beta\|x-y\|^2\\
&=(\alpha\beta-\alpha^2\delta^2/4)\|x-y\|^2\\
&=\alpha(\beta-\alpha\delta^2/4)\|x-y\|^2
\end{aligned}$$

当 $0<\alpha<4\beta/\delta^2$ 时,$\alpha(\beta-\alpha\delta^2/4)\geqslant 0$, 即此时 $\pi_\alpha(\cdot)$ 是强单调的.

(iii) 由式 (7.18), 当 $0<\alpha\leqslant 4\gamma$ 及 $0<\varepsilon\leqslant 2\left(\frac{1}{\alpha}-\frac{1}{4\gamma}\right)$ 时,$\alpha^2\gamma\left(\frac{1}{\alpha}-\frac{1}{4\gamma}-\frac{\varepsilon}{2}\right)\geqslant 0$, 又 $\varepsilon\leqslant 2/\alpha$, 故 $\alpha\varepsilon(1-\alpha\varepsilon/4)>0$, 从而

$$\langle x-y,\pi_{\alpha,\varepsilon}(x)-\pi_{\alpha,\varepsilon}(y)\rangle\geqslant\alpha\varepsilon(1-\alpha\varepsilon/4)\|x-y\|^2$$

即 $\pi_{\alpha,\varepsilon}(\cdot)$ 是强单调的.

定理 7.10 设 $T:H\to H$ 是单值映射,$\varepsilon\geqslant 0,\alpha,\beta,\gamma,\delta$ 均为正数.

(i) 如果 T 是 γ-余强制的, 则当 $\alpha>\frac{1}{4\gamma}$ 时, 正规映射 $\Phi_\alpha(\cdot)$ 是单调的;

(ii) 如果 T 是 β-强单调的和 δ-Lipschitz 连续的, 则当 $\alpha>\frac{\delta^2}{4\beta}$ 时, 正规映射 $\Phi_\alpha(\cdot)$ 是强单调的;

(iii) 如果 T 是 γ-余强制的, 则当 $\alpha>\frac{1}{4\gamma}$ 及 $0<\varepsilon<\alpha$ 时, 扰动正规映射 $\Phi_{\alpha,\varepsilon}(\cdot)$ 是强单调的.

证明 令 $0\leqslant r\leqslant\varepsilon<\alpha$, 记

$$Q'_z=Q_{1/\alpha}(z)=z-P_{1/\alpha}(z)=z-J^{\varphi}_{1/\alpha}(z),\quad \forall z\in H$$

则对 $\forall x,y\in H$, 由引理 7.7(i) 有

$$\langle x-y,Q'_x-Q'_y\rangle\geqslant\|Q'_x-Q'_y\|^2 \tag{7.19}$$

由此可得

$$\|x-y\|\geqslant\|Q'_x-Q'_y\| \tag{7.20}$$

由引理 7.7(ii) 有

$$\begin{aligned}
&(\alpha-r)\|Q'_x-Q'_y\|^2+\langle Q'_x-Q'_y,T(P_{1/\alpha}(x))-T(P_{1/\alpha}(y))\rangle\\
&\geqslant-\frac{1}{4(\alpha-r)}\|T(P_{1/\alpha}(x))-T(P_{1/\alpha}(y))\|^2
\end{aligned} \tag{7.21}$$

由式 (7.19)~ 式 (7.21) 有

$$
\begin{aligned}
&\langle x-y, \Phi_{\alpha,\varepsilon}(x)-\Phi_{\alpha,\varepsilon}(y)\rangle - r\|x-y\|^2 \\
=&\langle x-y, (T(P_{1/\alpha}(x))+\varepsilon P_{1/\alpha}(x)+\alpha Q'_x)-(T(P_{1/\alpha}(y))+\varepsilon P_{1/\alpha}(y)+\alpha Q'_y)\rangle \\
&-r\|x-y\|^2 \\
=&\alpha\langle x-y, Q'_x-Q'_y\rangle+\varepsilon\langle x-y, P_{1/\alpha}(x)-P_{1/\alpha}(y)\rangle \\
&-r\|x-y\|^2+\langle x-y, T(P_{1/\alpha}(x))-T(P_{1/\alpha}(y))\rangle \\
=&(\alpha-\varepsilon)\langle x-y, Q'_x-Q'_y\rangle+(\varepsilon-r)\|x-y\|^2 \\
&+\langle x-y, T(P_{1/\alpha}(x))-T(P_{1/\alpha}(y))\rangle \qquad (7.22)\\
=&(\alpha-\varepsilon)\langle x-y, Q'_x-Q'_y\rangle+(\varepsilon-r)\|x-y\|^2 \\
&+\langle Q'_x-Q'_y, T(P_{1/\alpha}(x))-T(P_{1/\alpha}(y))\rangle \\
&+\langle P_{1/\alpha}(x)-P_{1/\alpha}(y), T(P_{1/\alpha}(x))-T(P_{1/\alpha}(y))\rangle \\
\geqslant&(\alpha-\varepsilon)\|Q'_x-Q'_y\|^2+(\varepsilon-r)\|Q'_x-Q'_y\|^2 \\
&+\langle Q'_x-Q'_y, T(P_{1/\alpha}(x))-T(P_{1/\alpha}(y))\rangle \\
&+\langle P_{1/\alpha}(x)-P_{1/\alpha}(y), T(P_{1/\alpha}(x))-T(P_{1/\alpha}(y))\rangle \\
=&(\alpha-r)\|Q'_x-Q'_y\|^2+\langle Q'_x-Q'_y, T(P_{1/\alpha}(x))-T(P_{1/\alpha}(y))\rangle \\
&+\langle P_{1/\alpha}(x)-P_{1/\alpha}(y), T(P_{1/\alpha}(x))-T(P_{1/\alpha}(y))\rangle \\
\geqslant&-\frac{1}{4(\alpha-r)}\|T(P_{1/\alpha}(x))-T(P_{1/\alpha}(y))\|^2 \\
&+\langle P_{1/\alpha}(x)-P_{1/\alpha}(y), T(P_{1/\alpha}(x))-T(P_{1/\alpha}(y))\rangle \qquad (7.23)
\end{aligned}
$$

(i) 如果 T 是 γ-余强制的, 在式 (7.23) 中令 $\varepsilon=r=0$ 有

$$
\begin{aligned}
&\langle x-y, \Phi_{\alpha}(x)-\Phi_{\alpha}(y)\rangle \\
\geqslant&-\frac{1}{4\alpha}\|T(P_{1/\alpha}(x))-T(P_{1/\alpha}(y))\|^2 \\
&+\langle P_{1/\alpha}(x)-P_{1/\alpha}(y), T(P_{1/\alpha}(x))-T(P_{1/\alpha}(y))\rangle \\
\geqslant&\left(\gamma-\frac{1}{4\alpha}\right)\|T(P_{1/\alpha}(x))-T(P_{1/\alpha}(y))\|^2
\end{aligned}
$$

故当 $\alpha>\dfrac{1}{4\gamma}$ 时, 有

$$
\langle x-y, \Phi_{\alpha}(x)-\Phi_{\alpha}(y)\rangle\geqslant 0
$$

即此时正规映射 $\Phi_{\alpha}(\cdot)$ 是单调的.

(ii) 如果 T 是 β-强单调的和 δ-Lipschitz 连续的, 令 $\varepsilon=0$, 则由式 (7.22) 有

$$\begin{aligned}&\langle x-y,\Phi_\alpha(x)-\Phi_\alpha(y)\rangle-r\|x-y\|^2\\=&\alpha\langle x-y,Q'_x-Q'_y\rangle-r\|x-y\|^2\\&+\langle x-y,T(P_{1/\alpha}(x))-T(P_{1/\alpha}(y))\rangle\end{aligned}\tag{7.24}$$

又

$$\begin{aligned}\|x-y\|^2=&\|(P_{1/\alpha}(x)-P_{1/\alpha}(y))+(Q'_x-Q'_y)\|^2\\\leqslant&2(\|P_{1/\alpha}(x)-P_{1/\alpha}(y)\|^2+\|Q'_x-Q'_y\|^2)\end{aligned}$$

令 $0<r<\dfrac{\alpha}{2}$, 从而由式 (7.24) 有

$$\begin{aligned}&\langle x-y,\Phi_\alpha(x)-\Phi_\alpha(y)\rangle-r\|x-y\|^2\\\geqslant&\alpha\|Q'_x-Q'_y\|^2-2r(\|P_{1/\alpha}(x)-P_{1/\alpha}(y)\|^2+\|Q'_x-Q'_y\|^2)\\&+\langle x-y,T(P_{1/\alpha}(x))-T(P_{1/\alpha}(y))\rangle\\=&(\alpha-2r)\|Q'_x-Q'_y\|^2+\langle Q'_x-Q'_y,T(P_{1/\alpha}(x))-T(P_{1/\alpha}(y))\rangle\\&+\langle P_{1/\alpha}(x)-P_{1/\alpha}(y),T(P_{1/\alpha}(x))-T(P_{1/\alpha}(y))\rangle-2r\|P_{1/\alpha}(x)-P_{1/\alpha}(y)\|^2\\\geqslant&-\frac{1}{4(\alpha-2r)}\|T(P_{1/\alpha}(x))-T(P_{1/\alpha}(y))\|^2-2r\|P_{1/\alpha}(x)-P_{1/\alpha}(y)\|^2\\&+\langle P_{1/\alpha}(x)-P_{1/\alpha}(y),T(P_{1/\alpha}(x))-T(P_{1/\alpha}(y))\rangle\\\geqslant&\left(\beta-2r-\frac{\delta^2}{4(\alpha-2r)}\right)\|P_{1/\alpha}(x)-P_{1/\alpha}(y)\|^2\end{aligned}$$

记 $F(\alpha,r)=2r+\dfrac{\delta^2}{4(\alpha-2r)}$, 给定 $r\geqslant 0, F(\alpha,r)$ 关于 α 递减, 令 $r=0$, 则由 $F(\alpha,0)=\dfrac{\delta^2}{4\alpha}<\beta$ 有 $\alpha>\dfrac{\delta^2}{4\beta}$, 又 $F(\alpha,r)$ 关于 r 递增, 故当 $\alpha>\dfrac{\delta^2}{4\beta}$ 时, 存在 $0<r<\dfrac{\alpha}{2}$ 使得 $F(\alpha,r)=2r+\dfrac{\delta^2}{4(\alpha-2r)}<\beta$, 而此时

$$\langle x-y,\Phi_\alpha(x)-\Phi_\alpha(y)\rangle-r\|x-y\|^2\geqslant 0$$

即

$$\langle x-y,\Phi_\alpha(x)-\Phi_\alpha(y)\rangle\geqslant r\|x-y\|^2$$

即 $\Phi_\alpha(\cdot)$ 是强单调的.

(iii) 如果 T 是 γ-余强制的, 则当 $0<\varepsilon<\alpha$ 时, 由式 (7.23) 有

$$\langle x-y,\Phi_{\alpha,\varepsilon}(x)-\Phi_{\alpha,\varepsilon}(y)\rangle-r\|x-y\|^2$$

$$\geqslant (\gamma - \frac{1}{4(\alpha - r)})\|T(P_{1/\alpha}(x)) - T(P_{1/\alpha}(y))\|^2$$

当 $\alpha > \frac{1}{4\gamma}$ 时, 令 $0 < r < \min\{\varepsilon, \alpha - \frac{1}{4\gamma}\}$, 此时 $\gamma - \frac{1}{4(\alpha - r)} \geqslant 0$, 从而

$$\langle x - y, \Phi_{\alpha,\varepsilon}(x) - \Phi_{\alpha,\varepsilon}(y)\rangle \geqslant r\|x - y\|^2$$

即 $\Phi_{\alpha,\varepsilon}(\cdot)$ 是强单调的.

由定理 7.9 和定理 7.10 可得如下推论.

推论 7.11　设 T 是单调的且是 δ-Lipschitz 连续的.

(i) 如果 $0 < \varepsilon < \infty$ 且 $0 < \alpha < \frac{4\varepsilon}{(\delta + \varepsilon)^2}$, 则扰动不动点映射 $\pi_{\alpha,\varepsilon}(\cdot)$ 是强单调的;

(ii) 如果 $0 < \varepsilon < \infty$ 且 $\alpha > \frac{(\delta + \varepsilon)^2}{4\varepsilon}$, 则扰动正规映射 $\Phi_{\alpha,\varepsilon}(\cdot)$ 是强单调的.

证明　记 $G(x) = T(x) + \varepsilon x$, 则此时 $\pi_{\alpha,\varepsilon}(x) = x - J_\alpha^\varphi(x - \alpha G(x))$, $\Phi_{\alpha,\varepsilon}(x) = G(J_{1/\alpha}^\varphi(x)) + \alpha(x - J_{1/\alpha}^\varphi(x))$.

由于 T 是单调的, 故

$$\begin{aligned}\langle x - y, G(x) - G(y)\rangle &= \langle x - y, (T(x) - T(y)) + \varepsilon(x - y)\rangle \\ &= \langle x - y, T(x) - T(y)\rangle + \varepsilon\|x - y\|^2 \geqslant \varepsilon\|x - y\|^2\end{aligned}$$

即 $G(\cdot)$ 是 ε-强单调的. 由于 T 是 δ-Lipschitz 连续的, 故

$$\begin{aligned}\|G(x) - G(y)\| &= \|(T(x) - T(y)) + \varepsilon(x - y)\| \\ &\leqslant \|T(x) - T(y)\| + \varepsilon\|x - y\| \leqslant (\delta + \varepsilon)\|x - y\|\end{aligned}$$

即 $G(\cdot)$ 是 $(\delta + \varepsilon)$-Lipschitz 连续的. 从而由定理 7.9(ii) 知, 当 $0 < \alpha < \frac{4\varepsilon}{(\delta + \varepsilon)^2}$时, $\pi_{\alpha,\varepsilon}(\cdot)$ 是强单调的; 由定理 7.10(ii) 知, 当 $\alpha > \frac{(\delta + \varepsilon)^2}{4\varepsilon}$ 时, $\Phi_{\alpha,\varepsilon}(\cdot)$ 是强单调的.

第 8 章　一类半变分不等式

本章介绍了一类依赖时间参数的 Navier-Stokes 型的半变分不等式, 其解的存在性证明方法是基于 Rothe 方法, 即时间导数的向后 Euler 差分的时间半离散技巧, 并且我们证明了 Rothe 问题 (即时间半离散问题) 的解存在, 它们包含了一个弱收敛的子序列, 其弱极限为半变分不等式问题的解. 同时, 在适当的假定条件下, 我们证明了半变分不等式问题的解的唯一性以及解对问题数据的连续依赖性.

8.1　问题的提出

设 V 是可分自反 Banach 空间, H 是 Hilbert 空间. 我们将 H 的对偶空间看作它本身: $H^* = H$. 用 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 表示 V 和 V^* 之间的对偶配对, 用 $(\cdot,\cdot)$ 表示 H 中的标量积. 我们用 $\|\cdot\|_V$, $\|\cdot\|_H$ 和 $|\cdot|$ 分别表示 V, H 和 $\mathbb{R}^n$ 中的范数. 设 $V \subset H \subset V^*$ 为进化三元组空间, 且其嵌入是稠密的、连续的和紧的. 用 $\iota : V \to H$ 表示嵌入单射. 令 U 为自反 Banach 空间, $\ell : V \to U$ 为线性连续算子. 为叙述方便, $\|\iota\|_{\mathcal{L}(V,H)}$ 和 $\|\ell\|_{\mathcal{L}(V,U)}$ 分别简记为 $\|\iota\|$ 和 $\|\ell\|$. 令 $T > 0$, 我们定义以下空间: $\mathcal{V} = L^2(0,T;V)$, $\mathcal{H} = L^2(0,T;H)$, $\mathcal{U} = L^2(0,T;U)$, $\mathcal{V}^* = L^2(0,T;V^*)$ 和 $\mathcal{W} = \{v \in \mathcal{V} \mid v' \in \mathcal{V}^*\}$, 其中 v' 为 v 在分布意义下的时间导数. 容易看出嵌入 $\mathcal{W} \subset C(0,T;H)$ 是连续的. 下面介绍广义 Navier-Stokes 型算子.

定义 8.1　称 $N : V \to V^*$ 为广义 Navier-Stokes 型算子, 如果 $Nv = Av + B[v]$, 其中 $H(A)$: $A \in \mathcal{L}(V;V^*)$ 是对称的, 且对常数 $\alpha > 0$ 和 $\beta \geqslant 0$, 有

$$\langle Av, v\rangle \geqslant \alpha \|v\|_V^2 - \beta \|v\|_H^2, \quad \forall v \in V \tag{8.1}$$

$H(B)$: $B[v] := B(v,v)$, $B: V \times V \to V^*$ 是双线性算子, 且满足对任意 $u, v \in V$, $\langle B(u,v), v\rangle = 0$, 且 $B[\cdot] : V \to V^*$ 是弱连续的.

注解 8.1　如果条件 (8.1) 被如下不等式代替:

$$\langle Av, v\rangle \geqslant \alpha\|v\|_V^2, \quad \forall v \in V \tag{8.2}$$

则定义 8.1 中的算子 N 称为 Navier-Stokes 型算子.

对于广义 Navier-Stokes 算子 N, 显而易见, 如下不等式成立:

$$\langle Nv, v\rangle \geqslant \alpha \|v\|_V^2 - \beta \|v\|_H^2, \quad \forall v \in V \tag{8.3}$$

我们有下面的结果.

引理 8.1 广义 Navier-Stokes 算子是伪单调的.

我们考虑如下问题.

问题 8.1 求 $u \in \mathcal{W}$ 使得

$$\begin{cases} u'(t) + Au(t) + B[u(t)] + \ell^* \partial\psi(\ell u(t)) \ni f(t), \quad \text{a.e. } t \in (0,T) \\ u(0) = u_0 \end{cases} \tag{8.4}$$

其中, $f \in \mathcal{V}^*$, $\psi\colon U \to \mathbb{R}$, $\partial\psi$ 是 $\psi(\cdot)$ 在 Clarke 意义下的次微分, $\ell^*\colon U^* \to V^*$ 为 ℓ 的伴随算子.

问题 8.1 有下面的等价形式.

问题 8.2 求 $(u,\eta) \in \mathcal{W} \times \mathcal{U}^*$ 使得

$$\begin{cases} u'(t) + Au(t) + B[u(t)] + \ell^*\eta(t) = f(t), \quad \text{a.e. } t \in (0,T) \\ \eta(t) \in \partial\psi(\ell u(t)), \quad \text{a.e. } t \in (0,T) \\ u(0) = u_0 \end{cases} \tag{8.5}$$

为后续证明之需, 我们需要以下条件:

$H(\psi)$: 泛函 $\psi : U \to \mathbb{R}$ 满足:

(i) ψ 是局部 Lipschitz 的;

(ii) $\|\eta\|_{U^*} \leqslant c_\psi(1 + \|\xi\|_U)$, $\forall \eta \in \partial\psi(\xi)$, $\xi \in U$, 其中常数 $c_\psi > 0$;

(iii) $\langle \eta_1 - \eta_2, \xi_1 - \xi_2 \rangle_{U^* \times U} \geqslant -m_1\|\xi_1 - \xi_2\|_U^2$, $\forall \eta_i \in \partial\psi(\xi_i)$, $\xi_i \in U$, $i = 1,2$, $m_1 \geqslant 0$.

$H(\ell)$: 算子 $\ell \in \mathcal{L}(V;U)$ 是紧的, 且其 Nemytskii 算子 $\overline{\ell} : M^{2,2}(0,T;V,V^*) \to \mathcal{U}$(定义为 $(\overline{\ell}v)(t) = \ell v(t)$) 也是紧的.

$H(B)_1$: 存在常数 $K_1 > 0$ 使得

$$\|B[v]\|_{\mathcal{V}^*} \leqslant K_1 \|v\|_{\mathcal{V}} \|v\|_{L^\infty(0,T;H)}, \quad \forall v \in \mathcal{V} \cap L^\infty(0,T;H)$$

$H(B)_2$: 存在常数 $K_2 > 0$, $\theta, \rho \in \left[0, \dfrac{1}{2}\right]$ 使得

$$|\langle B(u,v), u \rangle| \leqslant K_2 \|u\|_V^{1+\theta} \|u\|_H^{1-\theta} \|v\|_V^{\rho} \|v\|_H^{1-\rho}, \quad \forall u, v \in V$$

8.2 存 在 性

本节我们讨论问题 8.2 解的存在性, 其方法是基于向后 Euler 差分的时间半离散逼近方法 (称为 Rothe 方法).

对给定的 $N \in \mathbb{N}$, 定义时间步长 $k = T/N$. 引入 f 的逐段常数插值为

$$f_{k,i} = \frac{1}{k}\int_{(i-1)k}^{ik} f(t)\mathrm{d}t, \quad i = 1, \cdots, N$$

我们通过 V 中的元素逼近初始条件, 也就是说, 设序列 $\{u_{k,0}\} \subset V$ 满足: 在 H 中 $u_{k,0} \to u_0$, 且对某个 $C > 0$ 有 $\|u_{k,0}\|_V \leqslant C/\sqrt{k}$. 由于 V 在 H 中稠密, 这样的序列 $\{u_{k,0}\}$ 存在 (参见文献 [126]).

接下来研究问题 8.2 的 Rothe 逼近方法.

问题 8.3 求 $\{u_{k,i}\}_{i=0}^N \subset V$ 和 $\{\eta_{k,i}\}_{i=0}^N \subset U^*$ 使得, 对 $i = 1, \cdots, N$, 有

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{1}{k}(u_{k,i} - u_{k,i-1}, v) + \langle Au_{k,i}, v\rangle + \langle B[u_{k,i}], v\rangle \\ \quad + \langle \eta_{k,i}, \ell v\rangle_{U^*\times U} = \langle f_{k,i}, v\rangle, \quad \forall v \in V \\ \eta_{k,i} \in \partial\psi(\ell u_{k,i}) \end{array}\right. \tag{8.6}$$

首先我们证明问题 8.3 解的存在性.

定理 8.2 *假定 $H(A)$, $H(B)$, $H(\psi)$, $u_0 \in H$ 和 $\alpha > c_\psi\|\ell\|^2$, 则对充分小的 $k > 0$, 问题 8.3 存在一个解.*

证明 只需证明对给定的 $u_{k,i-1} \in V$, 存在 $u_{k,i} \in V$ 和 $\eta_{k,i} \in U^*$ 满足式 (8.6) 即可. 定义多值算子 $L: V \to 2^{V^*}$ 为

$$Lv = \frac{\iota^*\iota}{k}v + Av + B[v] + \ell^*\partial\psi(\ell v), \quad v \in V$$

那么, 式 (8.6) 等价于

$$Lu_{k,i} \ni f_{k,i} + \frac{\iota^*\iota}{k}u_{k,i-1}$$

因此, 问题转化为证明 L 的满射性. 根据定理 1.36, 只需证明 L 是伪单调和强制的.

首先证明 L 是强制的. 设 $v \in V$ 和 $v^* \in Lv$. 因此

$$v^* = \frac{\iota^*\iota}{k}v + Av + B[v] + \ell^*\eta$$

其中, $\eta \in \partial\psi(\ell v)$. 应用 $H(A)$ 和 $H(B)$, 有

$$\begin{aligned} \langle v^*, v\rangle &= \left(\frac{\iota^*\iota}{k}v, v\right) + \langle Av, v\rangle + \langle B[v], v\rangle + \langle \eta, \ell v\rangle_{U^*\times U} \\ &\geqslant \left(\frac{1}{k} - \beta\right)\|v\|_H^2 + \alpha\|v\|_V^2 + \langle \eta, \ell v\rangle_{U^*\times U} \end{aligned} \tag{8.7}$$

根据 $H(\psi)$(ii) 有

$$\begin{aligned}\langle \eta, \ell v\rangle_{U^*\times U} &\geqslant -\|\ell\|\|\eta\|_{U^*}\|v\|_V\\ &\geqslant -c_\psi\|\ell\|\|v\|_V(1+\|\ell v\|_U)\\ &\geqslant -c_\psi\|\ell\|\|v\|_V(1+\|\ell\|\|v\|_V)\\ &= -c_\psi\|\ell\|^2\|v\|_V^2 - c_\psi\|\ell\|\|v\|_V \end{aligned}\tag{8.8}$$

因此, 根据式 (8.7) 和式 (8.8) 可得

$$\langle v^*, v\rangle \geqslant \left(\frac{1}{k}-\beta\right)\|v\|_H^2 + (\alpha - c_\psi\|\ell\|^2)\|v\|_V^2 - c_\psi\|\ell\|\|v\|_V$$

所以对充分小的 $k<1/\beta$, 算子 L 是强制的.

接下来证明 L 是伪单调的. 根据命题 1.34 可知, 算子 $\iota^*\iota/k: V\to V^*$ 是伪单调的. 现在我们应用命题 1.34 证明 $\ell^*\partial\psi(\ell\cdot)$ 是伪单调的. 条件 (i) 显然满足, 因为 Clarke 次微分是具有非空凸值和 (对自反空间而言) 弱紧值的. 条件 (ii) 直接根据假定 $H(\psi)(ii)$ 即可得. 为证明 $\ell^*\partial\psi(\ell\cdot)$ 满足命题 1.34 的条件 (iii), 设在 V 中 $v_n\rightharpoonup v$, 在 V^* 中 $\xi_n\rightharpoonup\xi$, 其中 $\xi_n\in\ell^*\partial\psi(\ell v_n)$. 由于算子 $\ell: V\to U$ 是紧的, 所以在 U 中, $\ell v_n\to\ell v$. 定义 $\eta_n\in\partial\psi(\ell v_n)$ 使得 $\xi_n=\ell^*\eta_n$. 根据假定 $H(\psi)$(ii), 存在子序列 (仍然记为 η_n) 使得在 U^* 中, $\eta_n\rightharpoonup\eta$. 由于 $\partial\psi: U\to 2^{U^*}$ 具有非空闭值的 (从 U 到 U_w^*), 所以 $\eta\in\partial\psi(\ell v)$. 显然 $\xi=\ell^*\eta$, $\xi\in\ell^*\partial\psi(\ell v)$, 而且 $\langle v_n,\xi_n\rangle=\langle\ell v_n,\eta_n\rangle_{U\times U^*}\to\langle\ell v,\eta\rangle_{U\times U^*}=\langle v,\xi\rangle$. 根据极限唯一性定理, 上述收敛性对整个序列 $\{\eta_n\}$ 都成立. 根据引理 8.1 可知, $N(\cdot):=A(\cdot)+B[\cdot]$ 是伪单调的. 由于两个伪单调算子的和仍然是伪单调的, 所以 L 是伪单调的.

现在建立关于问题 8.3 解的先验界限结果.

引理 8.3　*如果定理 8.2 中的假定成立, 则存在常数 $M_1>0$(与 k 无关), 使得对充分小的 $k>0$, 有*

$$\max_{1\leqslant i\leqslant N}\|u_{k,i}\|_H + \sum_{i=1}^N\|u_{k,i}-u_{k,i-1}\|_H^2 + k\sum_{i=1}^N\|u_{k,i}\|_V^2 \leqslant M_1 \tag{8.9}$$

证明　在式 (8.6) 中令 $v=u_{k,i}$, 有

$$\frac{1}{k}(u_{k,i}-u_{k,i-1},u_{k,i})+\langle Au_{k,i},u_{k,i}\rangle+\langle B[u_{k,i}],u_{k,i}\rangle+\langle\eta_{k,i},\ell u_{k,i}\rangle_{U^*\times U}=\langle f_{k,i},u_{k,i}\rangle \tag{8.10}$$

注意到

$$(u_{k,i}-u_{k,i-1},u_{k,i})=\frac{1}{2}\|u_{k,i}\|_H^2-\frac{1}{2}\|u_{k,i-1}\|_H^2+\frac{1}{2}\|u_{k,i}-u_{k,i-1}\|_H^2$$

根据假定 $H(A)$ 和 $H(B)$ 可得

$$\langle Au_{k,i}, u_{k,i}\rangle + \langle B[u_{k,i}], u_{k,i}\rangle \geqslant \alpha\|u_{k,i}\|_V^2 - \beta\|u_{k,i}\|_H^2 \tag{8.11}$$

而且对任意的 $\varepsilon > 0$, 有

$$\langle f_{k,i}, u_{k,i}\rangle \leqslant \|f_{k,i}\|_{V^*}\|u_{k,i}\|_V \leqslant \frac{\varepsilon}{2}\|u_{k,i}\|_V^2 + \frac{1}{2\varepsilon}\|f_{k,i}\|_{V^*}^2$$

根据式 (8.8) 有

$$\langle \eta_{k,i}, \ell u_{k,i}\rangle_{U^*\times U} \geqslant -c_\psi\|\ell\|^2\|u_{k,i}\|_V^2 - c_\psi\|\ell\|\|u_{k,i}\|_V$$

所以对任意的 $\varepsilon > 0$ 有

$$\begin{aligned}\langle \eta_{k,i}, \ell u_{k,i}\rangle_{U^*\times U} &\geqslant -c_\psi\|\ell\|^2\|u_{k,i}\|_V^2 - \frac{\varepsilon}{2}\|u_{k,i}\|_V^2 - \frac{c_\psi^2\|\ell\|^2}{2\varepsilon}\\ &= (-c_\psi\|\ell\|^2 - \frac{\varepsilon}{2})\|u_{k,i}\|_V^2 - \frac{c_\psi^2\|\ell\|^2}{2\varepsilon}\end{aligned} \tag{8.12}$$

因此, 从式 (8.10) 可得

$$\begin{aligned}&\|u_{k,i}\|_H^2 - \|u_{k,i-1}\|_H^2 + \|u_{k,i} - u_{k,i-1}\|_H^2 + c_1k\|u_{k,i}\|_V^2\\ \leqslant\ &\frac{k}{\varepsilon}\|f_{k,i}\|_{V^*}^2 + 2k\beta\|u_{k,i}\|_H^2 + c_2k\end{aligned} \tag{8.13}$$

其中, $c_1 = 2\left(\alpha - \varepsilon - c_\psi\|\ell\|^2\right)$, $c_2 = c_\psi^2\|\ell\|^2/\varepsilon$, 且 $\varepsilon > 0$ 满足 $c_1 > 0$, 例如, 令 $\varepsilon = \left(\alpha - c_\psi\|\ell\|^2\right)/2$.

对 $1 \leqslant n \leqslant N$, 在不等式 (8.13) 两边对 $i = 1, \cdots, n$ 求和后得到

$$\begin{aligned}&\|u_{k,n}\|_H^2 + \sum_{i=1}^n \|u_{k,i} - u_{k,i-1}\|_H^2 + c_1k\sum_{i=1}^n\|u_{k,i}\|_V^2\\ \leqslant\ &\|u_{k,0}\|_H^2 + 2k\beta\sum_{i=1}^n\|u_{k,i}\|_H^2 + \frac{1}{\varepsilon}k\sum_{i=1}^n\|f_{k,i}\|_{V^*}^2 + c_2T\\ \leqslant\ &\|u_{k,0}\|_H^2 + 2k\beta\sum_{i=1}^n\|u_{k,i}\|_H^2 + \frac{1}{\varepsilon}\|f\|_{\mathcal{V}^*}^2 + c_2T\end{aligned} \tag{8.14}$$

取 $k < 1/2\beta$, 并运用引理 1.39, 从式 (8.14) 可得式 (8.9). 证毕.

现在我们创建建立在问题 8.3 解上的依赖时间的逐段常数和逐段线性泛函序列, 并证明其子序列收敛到问题 8.2 的一个解. 定义逐段线性和逐段常数插值算子 $u_k \in C([0,T];V)$ 和 $\overline{u}_k \in L^\infty(0,T;V)$ 如下:

$$u_k(t) = u_{k,i} + \left(\frac{t}{k} - i\right)(u_{k,i} - u_{k,i-1}), \quad t \in ((i-1)k, ik],\ 1 \leqslant i \leqslant N$$

$$\overline{u}_k(t) = \begin{cases} u_{k,i},\ t \in ((i-1)k, ik],\ 1 \leqslant i \leqslant N\\ u_{k,0},\ t = 0\end{cases}$$

逐段常数函数 $\overline{\eta}_k : (0,T] \to U^*$ 为

$$\overline{\eta}_k(t) = \eta_{k,i}, t \in ((i-1)k, ik],\ 1 \leqslant i \leqslant N$$

而且定义 $f_k : (0,T] \to V^*$ 如下:

$$f_k(t) = f_{k,i}, t \in ((i-1)k, ik],\ 1 \leqslant i \leqslant N$$

则在 $\mathcal{V}^*$ 中 $f_k \to f$(参见文献 [25]). 因此, u_k 的分布导数为 $u_k'(t) = (u_{k,i} - u_{k,i-1})/k$, $t \in ((i-1)\,k, i\,k)$, $1 \leqslant i \leqslant N$. 所以式 (8.6) 可以重新写成如下形式:

$$\begin{cases} (u_k'(t), v) + \langle A\overline{u}_k(t), v\rangle + \langle B[\overline{u}_k(t)], v\rangle + \langle \overline{\eta}_k(t), \ell v\rangle_{U^* \times U} \\ = \langle f_k(t), v\rangle, \quad \forall\, v \in V,\ \text{a.e. } t \in (0,T) \\ \overline{\eta}_k(t) \in \partial\psi(\ell\overline{u}_k(t)),\ \text{a.e. } t \in (0,T) \end{cases} \tag{8.15}$$

我们定义 Nemytskii 算子 $\mathcal{A}, \mathcal{B} : \mathcal{V} \to \mathcal{V}^*$ 和 $\overline{\ell} : \mathcal{V} \to \mathcal{U}$ 分别为 $(\mathcal{A}v)(t) = A(v(t))$, $(\mathcal{B}v)(t) = B[v(t)](v \in \mathcal{V})$, 以及 $(\overline{\ell}v)(t) = \ell v(t)(v \in \mathcal{V})$. 因此, 上述问题 (8.15) 等价于

$$\begin{cases} (u_k', v)_{\mathcal{H}} + \langle \mathcal{A}\overline{u}_k, v\rangle_{\mathcal{V}^* \times \mathcal{V}} + \langle \mathcal{B}\overline{u}_k, v\rangle_{\mathcal{V}^* \times \mathcal{V}} + \langle \overline{\eta}_k, \overline{\ell}v\rangle_{\mathcal{U}^* \times \mathcal{U}} \\ = \langle f_k, v\rangle_{\mathcal{V}^* \times \mathcal{V}}, \quad \forall\, v \in \mathcal{V} \\ \overline{\eta}_k(t) \in \partial\psi((\overline{\ell}\,\overline{u}_k)(t)),\ \text{a.e. } t \in (0,T) \end{cases} \tag{8.16}$$

引理 8.4 假设 $H(A)$, $H(B)$, $H(B)_1$ 和 $H(\psi)$ 成立, 并且 $u_0 \in H$, $\alpha > c_\psi\|\ell\|^2$, 则存在常数 $M_2 > 0$(不依赖于 k), 使得对充分小的 $k > 0$, 有

$$\begin{aligned} &\|\overline{u}_k\|_{\mathcal{V}} + \|\overline{u}_k\|_{L^\infty(0,T;H)} + \|u_k\|_{C(0,T;H)} + \|u_k\|_{\mathcal{V}} + \|u_k'\|_{\mathcal{V}^*} \\ &+ \|\overline{\eta}_k\|_{\mathcal{U}^*} + \|\overline{u}_k\|_{M^{2,2}(0,T;V,V^*)} \leqslant M_2 \end{aligned} \tag{8.17}$$

证明 由不等式 (8.9) 可直接得到 $\|\overline{u}_k\|_{L^\infty(0,T;H)}$ 和 $\|u_k\|_{C(0,T;H)}$ 的有界性. 由于 $\|\overline{u}_k\|_{\mathcal{V}}^2 = k\sum\limits_{i=1}^{N}\|u_{k,i}\|_V^2$, 故 $\|\overline{u}_k\|_{\mathcal{V}}$ 的有界性可从式 (8.9) 得到. 根据 $\|u_k\|_{\mathcal{V}}^2 \leqslant k\sum\limits_{i=0}^{N}\|u_{k,i}\|_V^2$, 式 (8.9) 和 $\|u_{k,0}\|_V \leqslant C/\sqrt{k}$, 我们得到 $\|u_k\|_{\mathcal{V}}$ 的有界性.

接下来, 根据假定 $H(\psi)$(ii) 有

$$\begin{aligned} \|\overline{\eta}_k\|_{\mathcal{U}^*}^2 &= \int_0^T \|\overline{\eta}_k(t)\|_{U^*}^2 \mathrm{d}t \\ &\leqslant \int_0^T \left(2c_\psi^2 + 2c_\psi^2\|\ell\|^2\|\overline{u}_k(t)\|_V^2\right)\mathrm{d}t \\ &= 2Tc_\psi^2 + 2c_\psi^2\|\ell\|^2\|\overline{u}_k\|_{\mathcal{V}}^2 \end{aligned}$$

因此, 从 $\|\overline{u}_k\|_{\mathcal{V}}$ 的有界性就得到 $\|\overline{\eta}_k\|_{\mathcal{U}^*}$ 的有界性.

根据

$$\langle u_k', v\rangle_{\mathcal{V}^*\times\mathcal{V}} = (u_k', v)_{\mathcal{H}} = \langle f_k, v\rangle_{\mathcal{V}^*\times\mathcal{V}} - \langle \mathcal{A}\overline{u}_k, v\rangle_{\mathcal{V}^*\times\mathcal{V}} - \langle \mathcal{B}\overline{u}_k, v\rangle_{\mathcal{V}^*\times\mathcal{V}} - \int_0^T \langle \overline{\eta}_k(t), \ell v(t)\rangle_{U^*\times U}\mathrm{d}t$$

可得

$$\|u_k'\|_{\mathcal{V}^*} \leqslant \|f_k\|_{\mathcal{V}^*} + \left(\int_0^T \|A\overline{u}_k(t)\|_{V^*}^2\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{2}} + \|B[\overline{u}_k]\|_{\mathcal{V}^*} + \|\ell\|\|\overline{\eta}_k\|_{\mathcal{U}^*} \tag{8.18}$$

由于 $\overline{u}_k \in \mathcal{V}\cap L^\infty(0,T;H)$, 故根据假定 $H(B)_1$ 有

$$\|B[\overline{u}_k]\|_{\mathcal{V}^*} \leqslant K_1\|\overline{u}_k\|_{\mathcal{V}}\|\overline{u}_k\|_{L^\infty(0,T;H)} \tag{8.19}$$

从而根据假定 $H(A)$, 式 (8.18) 和式 (8.19), 可得

$$\|u_k'\|_{\mathcal{V}^*} \leqslant \|f_k\|_{\mathcal{V}^*} + \|A\|_{\mathcal{L}(V,V^*)}\|\overline{u}_k\|_{\mathcal{V}} + K_1\|\overline{u}_k\|_{\mathcal{V}}\|\overline{u}_k\|_{L^\infty(0,T;H)} + \|\ell\|\|\overline{\eta}_k\|_{\mathcal{U}^*}$$

因此, 根据 $\|\overline{u}_k\|_{\mathcal{V}}$, $\|\overline{u}_k\|_{L^\infty(0,T;H)}$ 和 $\|\overline{\eta}_k\|_{\mathcal{U}^*}$ 的有界性就得到 $\|u_k'\|_{\mathcal{V}^*}$ 的有界性.

最后, 我们证明 $\|\overline{u}_k\|_{M^{2,2}(0,T;V,V^*)}$ 的有界性. 假设逐段常数函数 $\overline{u}_k$ 在 $\mathrm{BV}^2(0,T;V^*)$ 中的半范数在分割: $0=a_0<a_1<\cdots<a_n=T$ 取得, 且 $a_i\in((m_i-1)k, m_ik]$ 并满足 $\overline{u}_k(a_i)=u_{k,m_i}$, 其中 $m_0=0$, $m_n=N$ 和 $m_{i+1}>m_i (i=1,\cdots,N-1)$. 因此, 根据 $\|u_k'\|_{\mathcal{V}^*}$ 的有界性有

$$\begin{aligned}
\|\overline{u}_k\|_{\mathrm{BV}^2(0,T;V^*)}^2 &= \sum_{i=1}^n \|u_{k,m_i} - u_{k,m_i-1}\|_{V^*}^2 \\
&\leqslant \sum_{i=1}^n (m_i - m_{i-1}) \sum_{l=m_{i-1}+1}^{m_i} \|u_{k,l} - u_{k,l-1}\|_{V^*}^2 \\
&\leqslant \sum_{i=1}^n (m_i - m_{i-1}) \sum_{l=1}^{N} \|u_{k,l} - u_{k,l-1}\|_{V^*}^2 \\
&= N\sum_{l=1}^N \|u_{k,l} - u_{k,l-1}\|_{V^*}^2 = Tk\sum_{l=1}^N \left\|\frac{u_{k,l} - u_{k,l-1}}{k}\right\|_{V^*}^2 \\
&= T\int_0^T \|u_k'(t)\|_{V^*}^2\mathrm{d}t = T\|u_k'\|_{\mathcal{V}^*}^2
\end{aligned}$$

所以, 根据 $\|\overline{u}_k\|_{\mathcal{V}}$ 的有界性可知, 序列 $\{\overline{u}_k\}$ 在 $M^{2,2}(0,T;V,V^*)$ 中有界. 证毕.

定理 8.5 假设 $H(A)$, $H(B)$, $H(B)_1$, $H(\psi)$ 和 $H(\ell)$ 成立, 并且 $u_0 \in H$, $\alpha > c_\psi \|\ell\|^2$. 设 $u_k, \overline{u}_k$ 分别是建立在 Rothe 问题 8.3 解上的逐段线性和逐段常数函数, 则对充分小的 $k > 0$, 存在函数对 (u, η) 使得 (对子序列), 在 $\mathcal{W}$ 中 $u_k \rightharpoonup u$, 在 $L^\infty(0,T;H)$ 中 $u_k \rightharpoonup^* u$, 在 $\mathcal{V}$ 中 $\overline{u}_k \rightharpoonup u$, 在 $L^\infty(0,T;H)$ 中 $\overline{u}_k \rightharpoonup^* u$, 以及在 $\mathcal{U}^*$ 中 $\overline{\eta}_k \rightharpoonup \eta$. 而且, 极限 (u, η) 是问题 8.2 的一个解.

证明 根据不等式 (8.17), 我们可以假定存在 $\overline{u} \in \mathcal{V} \cap L^\infty(0,T;H)$, $u \in \mathcal{V} \cap L^\infty(0,T;H)$, $u_1 \in \mathcal{V}^*$ 和 $\eta \in \mathcal{U}^*$ 使得当 $k \to 0$ 时有 (必要时可考虑其子序列)

$$\text{在}\mathcal{V}\text{中}, \overline{u}_k \rightharpoonup \overline{u}; \text{在}L^\infty(0,T;H)\text{中}, \overline{u}_k \rightharpoonup^* \overline{u} \tag{8.20}$$

$$\text{在}\mathcal{V}\text{中}, u_k \rightharpoonup u; \text{在}L^\infty(0,T;H)\text{中}, u_k \rightharpoonup^* u \tag{8.21}$$

$$\text{在}\mathcal{V}^*\text{中}, u_k' \rightharpoonup u_1 \tag{8.22}$$

$$\text{在}\mathcal{U}^*\text{中}, \overline{\eta}_k \rightharpoonup \eta \tag{8.23}$$

首先证明 $\overline{u} = u$. 根据

$$\|\overline{u}_k - u_k\|_{\mathcal{V}^*}^2 = \sum_{i=1}^N \int_{(i-1)k}^{ik} (ik-t)^2 \left\| \frac{u_{k,i} - u_{k,i-1}}{k} \right\|_{V^*}^2 \mathrm{d}t = \frac{k^2}{3} \|u_k'\|_{\mathcal{V}^*}^2$$

可以得到: 在 $\mathcal{V}^*$ 中, $\overline{u}_k - u_k \to 0 (k \to 0)$. 另一方面, 从式 (8.20) 和式 (8.21) 可得: 在 $\mathcal{V}$ 中, $\overline{u}_k - u_k \rightharpoonup \overline{u} - u$. 由于嵌入 $\mathcal{V} \subset \mathcal{V}^*$ 是连续的, 故在 $\mathcal{V}^*$ 中, $\overline{u}_k - u_k \rightharpoonup \overline{u} - u$. 所以 $\overline{u} - u = 0$, 即 $\overline{u} = u$. 由于在 $\mathcal{V}$ 中 $u_k \rightharpoonup u$, 在 $\mathcal{V}^*$ 中 $u_k' \rightharpoonup u_1$, 所以根据命题 1.51 可得 $u_1 = u'$. 因此, 对所有的 $v \in \mathcal{V}$, 有

$$(u_k', v)_{\mathcal{H}} = \langle u_k', v \rangle_{\mathcal{V}^* \times \mathcal{V}} \to \langle u', v \rangle_{\mathcal{V}^* \times \mathcal{V}} = (u', v)_{\mathcal{H}} \tag{8.24}$$

根据假定 $H(A)$, 易见 $\mathcal{A} : \mathcal{V} \to \mathcal{V}^*$ 是线性连续算子, 从而弱连续. 由于在 $\mathcal{V}$ 中 $\overline{u}_k \rightharpoonup u$, 故

$$\langle \mathcal{A}\overline{u}_k, v \rangle_{\mathcal{V}^* \times \mathcal{V}} \to \langle \mathcal{A}u, v \rangle_{\mathcal{V}^* \times \mathcal{V}} \tag{8.25}$$

根据式 (8.17) 和式 (8.19) 有

$$\|\mathcal{B}\overline{u}_k\|_{\mathcal{V}^*} = \|B[\overline{u}_k]\|_{\mathcal{V}^*} \leqslant K_1 \|\overline{u}_k\|_{\mathcal{V}} \|\overline{u}_k\|_{L^\infty(0,T;H)} < \infty$$

所以应用 Lebesgue 控制收敛定理, 根据假定 $H(B)$ 有

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{B}\overline{u}_k, v \rangle_{\mathcal{V}^* \times \mathcal{V}} &= \int_0^T \langle B[\overline{u}_k(t)], v(t) \rangle_{V^* \times V} \mathrm{d}t \to \int_0^T \langle B[u(t)], v(t) \rangle_{V^* \times V} \mathrm{d}t \\ &= \langle \mathcal{B}u, v \rangle_{\mathcal{V}^* \times \mathcal{V}} \end{aligned} \tag{8.26}$$

根据式 (8.23) 可得

$$\langle \overline{\eta}_k, \overline{\ell} v \rangle_{\mathcal{U}^* \times \mathcal{U}} \to \langle \eta, \overline{\ell} v \rangle_{\mathcal{U}^* \times \mathcal{U}} \tag{8.27}$$

又在 $\mathcal{V}^*$ 中 $f_k \to f$, 所以

$$\langle f_k, v \rangle_{\mathcal{V}^* \times \mathcal{V}} \to \langle f, v \rangle_{\mathcal{V}^* \times \mathcal{V}} \tag{8.28}$$

应用式 (8.24)~式 (8.28), 在式 (8.16) 中令 $k \to 0$ 有

$$(u', v)_{\mathcal{H}} + \langle \mathcal{A}u, v \rangle_{\mathcal{V}^* \times \mathcal{V}} + \langle \mathcal{B}u, v \rangle_{\mathcal{V}^* \times \mathcal{V}} + \langle \eta, \overline{\ell} v \rangle_{\mathcal{U}^* \times \mathcal{U}} = \langle f, v \rangle_{\mathcal{V}^* \times \mathcal{V}}, \quad \forall v \in \mathcal{V} \tag{8.29}$$

由于在 $\mathcal{V}$ 中, $\overline{u}_k \rightharpoonup u$, 故根据假定 $H(\ell)$ 可得在 $\mathcal{U}$ 中, $\overline{\ell}\,\overline{u}_k \to \overline{\ell} u$. 因此, 在 U 中, $\overline{\ell}\,\overline{u}_k(t) \to \overline{\ell} u(t)$, a.e.$t \in (0,T)$(考虑其子序列). 由于 $\partial\psi : U \to 2^{U^*}$ 具有非空闭凸值且是上半连续的 (从 U 到 U_w^*), 所以根据式 (8.23) 和定理 1.38 有

$$\eta(t) \in \partial\psi(\ell u(t)), \quad \text{a.e. } t \in (0,T) \tag{8.30}$$

由于在 $\mathcal{V}$ 中 $u_k \rightharpoonup u$, 在 $\mathcal{V}^*$ 中 $u_k' \rightharpoonup u'$, 且嵌入 $\mathcal{W} \subset C(0,T;H)$ 是连续的, 所以在 $C(0,T;H)$ 中, $u_k \rightharpoonup u$, 从而对所有的 $t \in [0,T]$, 有 $u_k(t) \rightharpoonup u(t)$(在 H 中). 因此, 在 H 中, $u_{k,0} = u_k(0) \rightharpoonup u(0)$. 由于在 H 中, $u_{k,0} \to u_0$, 所以 $u(0) = u_0$. 证毕.

定理 8.5 提供了一个证明问题 8.2 解的存在性的建设性方法. 该方法的主要思想是, 用向后差分技术代替时间导数, 并在每个时间步骤求解相关联的椭圆问题, 以便在时间网格的连续点中寻找问题的解. 此外, 只要相应的椭圆问题可解, 该方法不要求任何光滑的或其他附加的正则化条件. Rothe 方法已经被用来研究多种偏微分方程模型, 如非线性偏微分方程、变分不等式、半变分不等式以及变分-半变分不等式等.

8.3 唯一性与连续依赖性

本节我们将研究问题 8.2 解的唯一性以及对数据 f 和 u_0 的连续依赖性.

令 $\lambda > 0$ 为嵌入 $V \subset H$ 的嵌入常数, 即

$$\|v\|_H \leqslant \lambda \|v\|_V, \quad \forall v \in V$$

首先我们给出问题 8.2 解的唯一性结果.

定理 8.6 假定 $H(A)$, $H(B)$, $H(B)_1$, $H(B)_2$, $H(\psi)$, $H(\ell)$, $u_0 \in H$ 和 $\alpha > c_\psi\|\ell\|^2 + \beta\lambda^2$. 设 $u \in \mathcal{V}$ 是问题 8.2 的解, 则存在常数 $C_0 > 0$ 使得

$$\|u\|_{\mathcal{V}} \leqslant C_0 \tag{8.31}$$

如果 $\alpha > m_1\|\ell\|^2$, 则问题 8.2 的解是唯一的.

证明 首先, 我们证明式 (8.31). 由于 $u \in \mathcal{V}$ 是问题 8.2 的解, 故有

$$\begin{aligned}&(u'(t), u(t)) + \langle Au(t), u(t)\rangle + \langle B[u(t)], u(t)\rangle + \langle \eta(t), \ell u(t)\rangle_{U^* \times U}\\ = &\langle f(t), u(t)\rangle, \text{ a.e. } t \in (0, T)\end{aligned}$$

其中, $\eta(t) \in \partial\psi(\ell u(t))$, a.e. $t \in (0, T)$.

由式 (8.8) 有

$$\langle \eta(t), \ell u(t)\rangle_{U^* \times U} \geqslant -c_\psi\|\ell\|^2\|u(t)\|_V^2 - c_\psi\|\ell\|\|u(t)\|_V, \quad \text{a.e. } t \in (0, T)$$

因此, 根据假定 $H(A)$ 和 $H(B)$ 有

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|u(t)\|_H^2 + (\alpha - c_\psi\|\ell\|^2 - \beta\lambda^2)\|u(t)\|_V^2 - c_\psi\|\ell\|\|u(t)\|_V\\ \leqslant &\langle f(t), u(t)\rangle, \quad \text{a.e. } t \in (0, T)\end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|u(t)\|_H^2 + (\alpha - c_\psi\|\ell\|^2 - \beta\lambda^2)\|u(t)\|_V^2\\ \leqslant &c_\psi\|\ell\|\|u(t)\|_V + \langle f(t), u(t)\rangle, \quad \text{a.e. } t \in (0, T)\end{aligned} \tag{8.32}$$

在不等式 (8.32) 两边关于 t 积分可得

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\|u(T)\|_H^2 - \frac{1}{2}\|u_0\|_H^2 + (\alpha - c_\psi\|\ell\|^2 - \beta\lambda^2)\|u\|_{\mathcal{V}}^2\\ \leqslant &c_\psi\|\ell\|\int_0^T \|u(t)\|_V \mathrm{d}t + \int_0^T \langle f(t), u(t)\rangle\, \mathrm{d}t\\ \leqslant &c_\psi\sqrt{T}\|\ell\|\|u\|_{\mathcal{V}} + \|f\|_{\mathcal{V}^*}\|u\|_{\mathcal{V}}\end{aligned}$$

所以

$$\frac{1}{2}\|u(T)\|_H^2 + (\alpha - c_\psi\|\ell\|^2 - \beta\lambda^2)\|u\|_{\mathcal{V}}^2 \leqslant (c_\psi\sqrt{T}\|\ell\| + \|f\|_{\mathcal{V}^*})\|u\|_{\mathcal{V}} + \frac{1}{2}\|u_0\|_H^2$$

因此, 式 (8.31) 成立.

接下来, 设 $(u_1,\eta_1),(u_2,\eta_2)$ 是问题 8.2 的两个解, 则

$$\begin{aligned}&(u_1'(t)-u_2'(t),v)+\langle A(u_1(t)-u_2(t)),v\rangle+\langle B[u_1(t)]-B[u_2(t)],v\rangle\\&+\langle \eta_1(t)-\eta_2(t),\ell v\rangle_{U^*\times U}=0,\quad \forall\, v\in V,\quad \text{a.e. } t\in(0,T)\end{aligned}\tag{8.33}$$

在式 (8.33) 中令 $v=u_1(t)-u_2(t)$ 可得

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|u_1(t)-u_2(t)\|_H^2+\langle A(u_1(t)-u_2(t)),u_1(t)-u_2(t)\rangle\\&+\langle B[u_1(t)]-B[u_2(t)],u_1(t)-u_2(t)\rangle\\&+\langle \eta_1(t)-\eta_2(t),\ell(u_1(t)-u_2(t))\rangle_{U^*\times U}=0,\quad \text{a.e. } t\in(0,T)\end{aligned}\tag{8.34}$$

由假定 $H(\psi)$(iii) 有

$$\begin{aligned}\langle \eta_1(t)-\eta_2(t),\ell(u_1(t)-u_2(t))\rangle_{U^*\times U}&\geqslant -m_1\|\ell(u_1(t)-u_2(t))\|_U^2\\&\geqslant -m_1\|\ell\|^2\|u_1(t)-u_2(t)\|_V^2\end{aligned}\tag{8.35}$$

根据假定 $H(B)$ 可得

$$\begin{aligned}\langle B[u_1(t)]-B[u_2(t)],u_1(t)-u_2(t)\rangle&=\langle B(u_1(t),u_1(t))-B(u_2(t),u_2(t)),u_1(t)-u_2(t)\rangle\\&=\langle B(u_1(t)-u_2(t),u_1(t)),u_1(t)-u_2(t)\rangle\\&\quad+\langle B(u_2(t),u_1(t)-u_2(t)),u_1(t)-u_2(t)\rangle\\&=\langle B(u_1(t)-u_2(t),u_1(t)),u_1(t)-u_2(t)\rangle\end{aligned}\tag{8.36}$$

根据假定 $H(A)$, $H(B)_1$, 以及式 (8.34)~式 (8.36), 有

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|u_1(t)-u_2(t)\|_H^2+(\alpha-m_1\|\ell\|^2)\|u_1(t)-u_2(t)\|_V^2-\beta\|u_1(t)-u_2(t)\|_H^2\\\leqslant\ &K_2\|u_1(t)-u_2(t)\|_V^{1+\theta}\|u_1(t)\\&-u_2(t)\|_H^{1-\theta}\|u_1(t)\|_V^{\rho}\|u_1(t)\|_H^{1-\rho},\quad \text{a.e. } t\in(0,T)\end{aligned}\tag{8.37}$$

在不等式 (8.37) 两边关于 t 积分可得

$$\begin{aligned}&\|u_1(t)-u_2(t)\|_H^2+2(\alpha-m_1\|\ell\|^2)\int_0^t\|u_1(s)-u_2(s)\|_V^2\mathrm{d}s\\&-2\beta\int_0^t\|u_1(s)-u_2(s)\|_H^2\mathrm{d}s\\\leqslant\ &2K_2\int_0^t\|u_1(s)-u_2(s)\|_V^{1+\theta}\|u_1(s)-u_2(s)\|_H^{1-\theta}\|u_1(s)\|_V^{\rho}\|u_1(s)\|_H^{1-\rho}\mathrm{d}s\end{aligned}\tag{8.38}$$

由于 $u_1 \in L^\infty(0,T;H)$, 故式 (8.38) 右端以下式作为一个上界:

$$2K_2\|u_1\|_{L^\infty(0,T;H)}\int_0^t \|u_1(s)-u_2(s)\|_V^{1+\theta}\|u_1(s)-u_2(s)\|_H^{1-\theta}\|u_1(s)\|_V^{\rho}\mathrm{d}s$$

进一步, 对上式应用修改的 Young 不等式 (参见式 (1.19)), 并令

$$\begin{aligned}&a=\|u_1(s)-u_2(s)\|_V^{1+\theta},\quad b=\|u_1(s)-u_2(s)\|_H^{1-\theta}\|u_1(s)\|_V^{\rho}\\ &p=\frac{2}{1+\theta},\quad q=\frac{2}{1-\theta},\quad \delta=\frac{p\varepsilon}{2K_2\max\{\|u_1\|_{L^\infty(0,T;H)},1\}}\end{aligned}$$

因此, 对任意的 $\varepsilon>0$ 有

$$\begin{aligned}&2K_2\int_0^t \|u_1(s)-u_2(s)\|_V^{1+\theta}\|u_1(s)-u_2(s)\|_H^{1-\theta}\|u_1(s)\|_V^{\rho}\|u_1(s)\|_H^{1-\rho}\mathrm{d}s\\ &\leqslant \varepsilon\int_0^t\|u_1(s)-u_2(s)\|_V^2\mathrm{d}s+C(\varepsilon,\theta)\int_0^t\|u_1(s)-u_2(s)\|_H^2\|u_1(s)\|_V^{\frac{2\rho}{1-\theta}}\mathrm{d}s \quad (8.39)\end{aligned}$$

其中, $C(\varepsilon,\theta)>0$ 取决于 ε,θ 和 $\|u_1\|_{L^\infty(0,T;H)}$. 取 $\varepsilon=2(\alpha-m_1\|\ell\|^2)$, 并将式 (8.39) 代入式 (8.38) 可得

$$\|u_1(t)-u_2(t)\|_H^2\leqslant\int_0^t\left(2\beta+C_1\|u_1(s)\|_V^{\frac{2\rho}{1-\theta}}\right)\|u_1(s)-u_2(s)\|_H^2\mathrm{d}s \qquad (8.40)$$

其中, $C_1>0$.

由于 $\|u_1(t)-u_2(t)\|_H^2$ 是 t 的连续函数, 且 $\|u_1(\cdot)\|_V^{\frac{2\rho}{1-\theta}}\in L^1(0,T)$, 所以应用 Gronwall 不等式, 由式 (8.40) 可得 $u_1=u_2$. 证毕.

接下来, 我们建立问题 8.2 的解对 f 和 u_0 的连续依赖性.

定理 8.7　假设 $\alpha>m\|\ell\|^2+\beta\lambda^2$, 其中 $m=\max\{c_\psi,m_1\}$. 如果假定 $H(A)$, $H(B)$, $H(B)_1$, $H(B)_2$, $H(\psi)$, $H(\ell)$ 成立, 且 $u_0\in H$, 则映射 $(f,u_0)\mapsto u:\mathcal{V}^*\times H\to C(0,T;H)$ 是 Lipschitz 连续的, 其中 u 表示问题 8.2 的唯一解.

证明　设 $u_1,u_2\in\mathcal{W}$ 是问题 8.2 分别对应于 $f_1,f_2\in\mathcal{V}^*$ 和初始条件 $u_0^1,u_0^2\in H$ 的解. 先将 u_1 满足的方程减去 u_2 满足的方程, 然后用 $v=u_1(t)-u_2(t)$ 乘以所得方程的两边可得

$$\begin{aligned}&(u_1'(t)-u_2'(t),u_1(t)-u_2(t))+\langle A(u_1(t)-u_2(t)),u_1(t)-u_2(t)\rangle\\ &+\langle B[u_1(t)]-B[u_2(t)],u_1(t)-u_2(t)\rangle+\langle\eta_1(t)-\eta_2(t),\ell(u_1(t)-u_2(t))\rangle_{U^*\times U}\\ &=\langle f_1(t)-f_2(t),u_1(t)-u_2(t)\rangle,\quad \text{a.e. } t\in(0,T) \qquad (8.41)\end{aligned}$$

其中, $\eta_1(t)\in\partial\psi(\ell u_1(t))$, $\eta_2(t)\in\partial\psi(\ell u_2(t))$, a.e. $t\in(0,T)$. 类似于定理 8.6 中唯一

性的证明, 根据式 (8.41) 和 Hölder 不等式可得

$$\|u_1(t)-u_2(t)\|_H^2 \leqslant c\left(\|u_0^1-u_0^2\|_H^2+\int_0^t \|f_1(s)-f_2(s)\|_{V^*}^2\mathrm{d}s\right) + \int_0^t \left(2\beta+C_2\|u_1(s)\|_V^{\frac{2\rho}{1-\theta}}\right)\|u_1(s)-u_2(s)\|_H^2\mathrm{d}s \tag{8.42}$$

其中, $c>0$ 取决于 α, m_1 和 $\|\ell\|$, $C_2>0$.

应用 Gronwall 不等式, 并根据式 (8.42) 可得

$$\begin{aligned}\|u_1(t)-u_2(t)\|_H^2 &\leqslant c\left(\|u_0^1-u_0^2\|_H^2+\int_0^t \|f_1(s)-f_2(s)\|_{V^*}^2\mathrm{d}s\right)\\ &\quad\times\exp\left\{\int_0^t\left(2\beta+C_2\|u_1(s)\|_V^{\frac{2\rho}{1-\theta}}\right)\mathrm{d}s\right\}\\ &\leqslant c\left(\|u_0^1-u_0^2\|_H^2+\|f_1-f_2\|_{\mathcal{V}^*}^2\right)\\ &\quad\times\exp\left\{\int_0^T(2\beta+C_2\|u_1(t)\|_V^{\frac{2\rho}{1-\theta}})\mathrm{d}t\right\}\end{aligned} \tag{8.43}$$

注意到

$$\int_0^T \|u_1(t)\|_V^{\frac{2\rho}{1-\theta}}\mathrm{d}t \leqslant C_3\left(\int_0^T \|u_1(t)\|_V^2\mathrm{d}t\right)^{\frac{\rho}{1-\theta}} \tag{8.44}$$

其中, $\rho,\theta\in\left[0,\dfrac{1}{2}\right]$, $C_3>0$.

最后, 根据式 (8.31), 式 (8.43) 和式 (8.44) 可得

$$\begin{aligned}\|u_1(t)-u_2(t)\|_H^2 &\leqslant c\left(\|u_0^1-u_0^2\|_H^2+\|f_1-f_2\|_{\mathcal{V}^*}^2\right)\\ &\quad\times\exp\left\{2\beta T+C_4\left(\int_0^T \|u_1(t)\|_V^2\mathrm{d}t\right)^{\frac{\rho}{1-\theta}}\right\}\\ &= c\left(\|u_0^1-u_0^2\|_H^2+\|f_1-f_2\|_{\mathcal{V}^*}^2\right)\exp\left\{2\beta T+C_4\|u_1\|_{\mathcal{V}}^{\frac{2\rho}{1-\theta}}\right\}\\ &\leqslant c\left(\|u_0^1-u_0^2\|_H^2+\|f_1-f_2\|_{\mathcal{V}^*}^2\right)\exp\left\{2\beta T+C_4C_0^{\frac{2\rho}{1-\theta}}\right\}\\ &= C_5\left(\|u_0^1-u_0^2\|_H^2+\|f_1-f_2\|_{\mathcal{V}^*}^2\right)\end{aligned}$$

其中, $C_4>0$, $C_5=c\exp\left\{2\beta T+C_4C_0^{\frac{2\rho}{1-\theta}}\right\}$. 证毕.

文献注记

1964 年, Fichera[59] 在研究线性弹性体与刚性地基的无摩擦接触问题 (文献 [132]) 的解时首次提出了“变分不等式”一词. 随后, 有关变分不等式理论、应用和数值分析等方面的论文和专著不断涌现. Stampacchia 等 [71, 94, 136] 提出了变分不等式的一些数学理论; Duvaut 和 Lions[40] 讨论了力学和物理学中的变分不等式, Baiocchi 和 Capelo[14] 研究了变分不等式在自由边界等问题中的应用; 进一步, 许多学者对求解变分不等式的数值方法及其数值分析进行了研究 [67, 68, 75]. 特别地, 文献 [69] 介绍了变分不等式的数值方法及其在力学中的一些应用, 文献 [158] 讨论了变分不等式的基本理论及相关问题, 文献 [41] 系统介绍了有限维变分不等式的算法.

Noor[111] 和 Ding[39] 分别介绍了求解集值变分不等式与混合似变分不等式的预测-校正迭代算法, 进一步, Noor 等 [114, 116] 提出了寻找变分不等式问题的解集与非扩张映射不动点集合公共元素的预测-校正迭代方法. 本书第 2 章的结果主要来自我们的论文 [44, 53, 56]. 在 2.1 节中, 我们介绍了更一般形式的变分不等式的预测-校正迭代算法, 2.2 节提出了寻找广义混合似变分不等式问题的解集与非扩张映射不动点集合公共元素的扰动近似点-投影算法, 该方法克服了文献 [116] 中方法的局限性. 2.3 节是文献 [113] 结果的推广.

在诸如信号处理、网络资源配置、图像恢复等实际问题的数学模型中, 其约束条件能被表达成不动点问题或变分不等式的形式, 参见文献 [79]、[80]、[96]、[97], 因此寻找变分不等式问题解集合与非扩张映射不动点集合的公共元素问题成为研究热点, 参见文献 [19]、[77]、[78]、[104]、[105]、[143]、[147]、[150]. 本书第 3 章针对非扩张映射的不同类型对这个课题进行了研究. 与文献 [19]、[77] 相比, 3.1 节方法所需要参数的条件更弱, 且克服了文献 [19] 算法 3.1 的不可行性. 进一步, 我们用由非扩张映射族所定义的映射代替一般的非扩张映射, 应用 Armijo 线性搜索程序, 在连续性的假定下, 得到算法的收敛性结果, 比文献 [147] 对映射的 Lipschitz 连续性假设要弱. 从文献 [26] 得到启发, 在 3.3 节, 我们运用次梯度超梯度方法, 并考虑比非扩张映射更一般的严格伪压缩映射, 提出了寻找公共元素的两种算法, 并获得相应的强 (弱) 收敛定理. 第 3 章结果来源于文献 [30]、[31]、[54]、[55].

集值变分不等式是比经典变分不等式 (映射为单值) 更为广泛的一类变分不等式 [28], 许多学者对集值变分不等式的理论和算法进行了研究 [4,7,15,42,62,74,127,129].

Alber[2] 将 Sibony[131] 求解单值变分不等式的投影算法推广到求解集值变分不等式, 其映射要求是一致单调的. Konnov[84] 提出了求解集值变分不等式的联合松弛方法 (combined relaxation method), 该方法要求可行集必须具有显性表达式, 并要满足 Slater 约束条件. Iusem 等 [81] 利用单调算子的 ε-加强, 在映射是极大单调的条件下, 给出了求解集值变分不等式的超梯度方法. 鉴于此, 本书第 4 章的前三节研究了集值变分不等式的投影算法, 其条件是假设所涉及映射是伪单调的和连续的, 可行集是有限维实空间的任意非空闭凸集. 近来, Li 等 [90] 给出了求解集值变分不等式的一类投影算法, 该算法需要求解一个单值变分不等式, 计算费用较高. 为了克服这个困难, 4.1 节首先通过选择不同的超平面, 给出集值变分不等式的一类投影算法, 该算法无需求解单值变分不等式, 从而计算费用较低. 4.2 节将文献 [133] 经典变分不等式的二次投影算法推广到集值的情形. Solodov 等 [134] 给出了求解极大单调算子零点的投影-近似点算法, 其特点是下一步迭代为初始点到两个超平面交上的投影. 4.3 节借助这种方法研究集值变分不等式. 与前面介绍的方法不同, 在次梯度算法中, 可行集由凸函数所确定, 且初始点可以在有限维实空间中任意选取. 第 4 章的结果可参考文献 [45]、[48]、[50]、[52].

在实际问题中, 会遇到因可行集的形状不规则而不易计算投影的情况, 自然会想到寻找集合序列逼近可行集, 这就是本书第 5 章的出发点. 从文献 [27] 得到启发, 在第 5 章的算法中, 下一步迭代是到超平面与集合序列交集上的投影, 该集合序列上图收敛到可行集. 借助 Armijo 线性搜索程序, 在比文献 [27] 更弱的条件下, 建立了强收敛性结果. 第 5 章的结果可参考文献 [46].

1980年, Giannessi[66] 首先提出了有限维空间上的向量变分不等式. 陈光亚等[29] 讨论了有限维空间上向量变分不等式与向量优化之间的联系. 他们利用 KKM 定理, 证明了向量优化问题解的存在性定理. 从那以后, 许多学者对向量变分不等式及其推广形式进行了研究, 并给出了不同条件下各类广义向量变分不等式与相应向量优化问题的联系 (可参见文献 [3]、[64]、[65]、[86]、[88]、[89]、[103]). 黎曼流形上的优化方法在理论上能统一地处理约束和无约束非线性优化问题. 正如 Németh[109] 所指出的那样, 在应用领域中有大量问题的模型可表示为流形上的变分不等式或边值问题. 近年来, 越来越多的学者致力于将非线性分析的概念和方法推广到流形上, 以便于研究流形上的优化问题、变分不等式相关理论与算法, 参见文献 [12]、[13]、[16]、[57]、[58]、[76]、[123]、[124]、[140]~[142]、[144]、[145]、[148]. 特别地, Colao 等在文献 [33] 中给出了 Hadamard 流形上的 KKM 定理, 它是研究变分不等式、均衡问题、优化问题的有力工具. 在假定向量场为单调的前提下, Ferreira 等 [57] 提出了 Hadamard 流形上单值变分不等式的超梯度算法; 为了削弱单调性的假设条件, 在相应向量场为伪单调的假设下, Tang 等 [140] 给出了 Hadamard 流形

上求解变分不等式的 Korpelevich 方法; 而 Li 等 [93] 在黎曼流形上证明了向量场为集值的变分不等式解的存在性、唯一性以及解集的凸性, 研究了针对这类变分不等式的邻近点算法的收敛性, 并将结果应用于黎曼流形上的凸优化问题. 6.1 节刻画了 Hadamard 流形上非光滑函数伪凸性与其梯度伪单调性的等价性, 是文献 [140] 中相应可微性结论的推广. 6.2 节建立了向量变分不等式和不可微非凸向量优化问题解的等价性的结果, 是文献 [154] 中的相应结论在 Hadamard 流形上的推广. 6.3 节应用 6.2 节建立的等价性结果, 证明了具有常值曲率的 Hadamard 流形上的向量优化问题解的存在性. 6.4 节介绍了 Hadamard 流形上集值变分不等式的投影算法, 是文献 [140] 中相应结论的推广. 第 6 章的内容部分取材于文献 [47].

众所周知, Gap-泛函可以将求解变分不等式转化为与之等价的最优化问题, 人们对它的研究已经取得了非常重要的成果 [11, 18, 41, 60, 61, 73, 121, 139, 153]. Gap-泛函的主要应用之一就是派生出误差界的概念, 误差界是对任意一点到变分不等式解集合的距离的估计, 它在变分不等式算法的收敛性分析中起着非常重要的作用 [42, 110, 120, 138]. 因此, 研究不同的 Gap-泛函以及它们与变分不等式解之间的关系, 已成为一个非常重要的课题. 最近, Solodov[135] 研究了混合变分不等式的几类 Gap-泛函, Noor[115] 研究了一般变分不等式的 Gap-泛函. 7.1 节介绍了集值变分不等式的三类 Gap-泛函, 并在较弱的条件下建立了集值变分不等式解的误差界. 7.2 节介绍了混合变分不等式的不动点映射及正规映射, 并建立了其单调性和强单调性的充分条件, 推广了文献 [63]、[131]、[159] 中的相应结果. 第 7 章的内容主要取材于文献 [43]、[51].

在 20 世纪 80 年代早期, Panagiotopoulos[118] 首先介绍了半变分不等式, 即具有局部 Lipschitz 泛函的 Clarke 次微分的偏微分包含, 它是变分不等式的推广. 在过去的三十年间, 半变分不等式被证实在许多学科中均有广泛的应用, 且许多问题可以数学模型化为半变分不等式. 在这期间, 许多学者对半变分不等式的理论、数值解以及应用进行了研究 (参见文献 [24]、[102]、[106]、[119] 及其参考文献). Migorski[99] 研究了抛物线型半变分不等式, 其特点是将证明半变分不等式解的存在性转化为证明函数的满射性; Carl[23] 利用上下解的存在代替多值映射的有界性假定, 证明由方程所控制问题的解的极限是所研究半变分不等式的解; Liu 等 [95] 研究了一类进化半变分不等式, 其解的存在性是通过增加具有正乘子的正则项到次微分包含来实现. 最近, Migorski 和 Ochal[101] 研究了 Navier-Stokes 方程的进化半变分不等式, 并运用 Galerkin 方法给出了进化半变分不等式解的存在性结果. 第 8 章介绍了 Navier-Stokes 型半变分不等式, 并建立了其解的存在性、唯一性和解对初始数据的连续依赖性等结果. 第 8 章的内容部分取材于文献 [49].

参 考 文 献

[1] Adams R A. Sobolev Spaces. New York: Academic Press, 1975.

[2] Alber Y I. Recurrence relations and variational inequalities. Soviet Mathematics, Doklady, 1983, 27: 511-517.

[3] Al-Homidan S, Ansari Q H. Generalized Minty vector variational-like inequalities and vector optimization problems. J. Optim. Theory Appl., 2010, 144: 1-11.

[4] Allevi E, Gnudi A, Konnov I V. The proximal point method for nonmonotone variational inequalities. Math. Methods Oper. Res., 2006, 63 (3): 553-565.

[5] Atkinson K, Han W. Theoretical Numerical Analysis: A Functional Analysis Framework. 3rd ed. New York: Springer, 2009.

[6] Attouch H. Variational Convergence for Functions and Operators. London: Pitman, 1984.

[7] Auslender A, Teboulle M. Lagrangian duality and related multiplier methods for variational inequality problems. SIAM J. Optim., 2000, 10(4): 1097-1115.

[8] Aubin J P, Cellina A. Differential Inclusions. New York: Springer-Verlag, 1984.

[9] Aubin J P, Frankowska H. Set-valued Analysis. Boston, Basel, Berlin: Birkhäuser, 1990.

[10] Aubin J P, Ekeland I. Applied Nonlinear Analysis. New York: John Wiley Sons Inc., 1984.

[11] Auchmuty G. Variational principles for variational inequalities. Numer. Funct. Anal. Optim., 1989, 10: 863-874.

[12] Azagra D. Ferrera J. Proximal calculus on Riemannian manifolds, with applications to fixed point theory. Mediterr. J. Math., 2005. 2: 437-450.

[13] Azagra D, Ferrera J, Lopez-Mesas F. Nonsmooth analysis and Hamilton-Jacobi equations on Riemannian manifolds. J. Funct. Anal., 2005, 220: 304-361.

[14] Baiocchi C, Capelo A. Variational and Quasivariational Inequalities: Applications to Free-Boundary Problems. Chichester: Wiley, 1984.

[15] Bao T Q, Khanh P Q. A projection-type algorithm for pseudomonotone nonlipschitzian multivalued variational inequalities// Eberhard A, Vvas N H, Luc D T. Generalized Convexity, Generalized Monotonicity and Applications. New York: Springer, 2005.

[16] Bento G C, Cruz Neto J X D. A subgradient method for multiobjective optimization on Riemannian manifolds. J. Optim. Theory Appl., 2013, 159: 125-137.

[17] Bento G C, Ferreira O P, Oliveira P R. Proximal point method for a special class of nonconvex functions on Hadamard manifolds. Optimization, 2015, 64(2): 289-319.

[18] Bnouhachem A, Noor M A. Inexact proximal point method for general variational inequalities. J. Math. Anal. Appl., 2006, 324: 1195-1212.

[19] Bnouhachem A, Noor M A, Hao Z. Some new extragradient iterative methods for variational inequalities. Nonlinear Analysis, 2009, 70: 1321-1329.

[20] Border K C. Fixed Pointed Theorems with Applications to Economics and Game Theory. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1985.

[21] Brezis H. Opérateurs Maximaux Monotone et Semigroups de Contractions dans les Espaces de Hilbert. Amsterdam: North-Holland, 1973.

[22] Bruck Jr R E. Properties of fixed point sets of nonexpansive mappings in Banach spaces. Transactions of the American Mathematical Society, 1973, 179: 251-262.

[23] Carl S. Enclosure of solutions for quasilinear dynamic hemivariational inequalities. Nonlinear

World, 1996, 3: 281-298.

[24] Carl S, Le V K, Motreanu D. Nonsmooth Variational Problems and Their Inequalities: Comparison Principles and Applications. New York: Springer, 2007.

[25] Carstensen C, Gwinner J. A theory of discretisation for nonlinear evolution inequalities applied to parabolic Signorini problems. Ann. Mat. Pura Appl., 1999, 177: 363-394.

[26] Censor Y, Gibali A, Reich S. The subgradient extragradient method for solving variational inequalities in Hilbert space. J. Optim. Theory Appl., 2011, 148: 318-335.

[27] Censor Y, Gibali A, Reich S. Extensions of Korpelevich's extragradient method for solving the variational inequality problem in Euclidean space. Optimization, 2012, 61(9): 1119-1132.

[28] Chan D, Pang J S. The generalized quasivariational inequality problem. Math. Oper. Res., 1982, 7: 21-222.

[29] Chen G Y, Craven B D. Existence and continuity of solutions for vector optimization. J. Optim. Theory Appl., 1994, 81: 459-467.

[30] 陈胜兰, 方长杰. 变分不等式的 3 步迭代法. 西南大学学报 (自然科学版), 2010, 32(2): 125-128.

[31] 陈胜兰, 方长杰. 变分不等式的新超梯度迭代法. 四川师范大学学报 (自然科学版), 2012, 35(1): 12-15.

[32] Clarke F H. Optimization and Nonsmooth Analysis. New York: Wiley, Interscience, 1983.

[33] Colao V, López G, Marino G, et al. Equilibrium problems in Hadamard manifolds. J. Math. Anal. Appl., 2012, 388: 61-77.

[34] Cruze Neto J X D, Ferreira O P, Pérez L R L. Monotone point-to-set vector fields. Balkan J. Geom. Appl., 2000, 5: 69-79.

[35] Cruz Neto J X D, Ferreira O P, Pérez L R L. Contributions to the study of monotone vector fields. Acta. Math. Hungar., 2002, 94: 307-320.

[36] Deimling K. Nonlinear Functional Analysis. Berlin: Springer-Verlag, 1985.

[37] Denkowski Z, Migórski S, Papageorgiou N S. An Introduction to Nonlinear Analysis: Theory. Boston, Dordrecht, London, New York: Kluwer Academic, Plenum Publishers, 2003.

[38] Denkowski Z, Migórski S, Papageorgiou N S. An Introduction to Nonlinear Analysis: Applications. Boston, Dordrecht, London, New York: Kluwer Academic, Plenum Publishers, 2003.

[39] Ding X P. Predictor-corrector iterative algorithms for solving nonlinear mixed variational-like inequalities. Applied Mathematics and Computation, 2004, 152(3): 855-865.

[40] Duvaut G, Lions J L. Inequalities in Mechanics and Physics. Berlin: Springer-Verlag, 1976.

[41] Facchinei F, Pang J S. Finite-dimensional Variational Inequalities and Complementarity Problems. New York: Springer-Verlag, 2003.

[42] Fan J H, Wang X G. Gap functions and global error bounds for set-valued variational inequalities. J. Comput. Appl. Math., 2010, 233: 2956-2965.

[43] 方长杰. 与混合变分不等式有关的不动点映射和正规映射的单调性. 四川师范大学学报 (自然科学版), 2005, 28(6): 655-659.

[44] Fang C J. Perturbed proximal-projection methods for nonlinear mixed variational-like inequalities. Journal of Mathematical Research and Exposition, 2010, 30(1): 127-140.

[45] Fang C J, Chen S L. A subgradient extragradient algorithm for solving multi-valued variational inequality. Applied Mathematics and Computation, 2014, 229: 123-130.

[46] Fang C J, Chen S L. Some extragradient algorithms for variational inequalities// Han W M,

Migorski S, Sofonea M. Advances in Variational and Hemivariational Inequalities: Theory, Numerical Analysis. and Applications. Volume 33: 145-171. Berlin: Springer, 2015.

[47] Fang C J, Chen S L. A projection algorithm for set-valued variational inequalities on Hadamard manifolds. Optimization Letters, 2015, 9: 779-794.

[48] Fang C J, Chen S L, Zheng J M. A projection-type method for mMultivalued variational inequality. Abstract and Applied Analysis, 2013, Article ID 836720, 6 pages, 2013. doi: 10.1155/2013/836720.

[49] Fang C J, Han W, Migorski S, et al. A class of hemivariational inequalities for nonstationary Navier-Stokes equations. Nonlinear Analysis: Real World Applications, 2016, 31: 257-276.

[50] Fang C J, He Y R. A new projection algorithm for generalized variational inequality. Journal of Inequalities and Applications, 2010, Article ID 182576, 8 pages, 2010. doi: 10.1155/2010/1825760.

[51] 方长杰, 何诣然. 广义变分不等式的优质泛函. 四川师范大学学报 (自然科学版), 2011, 34(4): 450-453.

[52] Fang C J, He Y R. A double projection algorithm for multi-valued variational inequalities and a unified framework of the method. Applied Mathematics and Computation, 2011, 217: 9543-9551.

[53] 方长杰, 田有先. 一类带有三元算子的广义混合拟平衡问题. 四川师范大学学报 (自然科学版), 2008, 31(3): 285-288.

[54] 方长杰, 王盈. Hilbert 空间中变分不等式的一种新算法. 四川师范大学学报 (自然科学版), 2015, 38(6): 824-829.

[55] Fang C J, Wang Y, Yang S K. Two algorithms for solving variational inequalities and fixed point problems. Journal of Fixed Point Theory and Applications, 2016, 18: 27-43.

[56] 方长杰, 郑莲, 丁协平. 解广义混合似变分不等式的预测-校正迭代算法. 四川师范大学学报 (自然科学版), 2005, 28(1): 10-14.

[57] Ferreira O P, Pérez L R L, Németh S Z. Singularities of monotone vector fields and an extragradient-type algorithm. J. Glob. Optim., 2005, 31: 133-151.

[58] Ferreira O P, Oliveira P R. Proximal point algorithm on Riemannian manifolds. Optimization, 2002, 51: 257-270.

[59] Fichera G. Problemi elastostatici con vincoli unilaterali. Ⅱ. Problema di Signorini con ambique condizioni al contorno. Mem. Accad. Naz. Lincei, S. Ⅷ, 1964, Ⅶ, Sez. I 5: 91-140.

[60] Fukushima M. Equivalent differentiable optimization problems and descent methods for asymmetric variational inequality problems. Math. Program., 1992, 53: 99-110.

[61] Fukushima M. Merit functions for variational inequality and complementarity problems// Di Pillo G, Giannessi F. Nonlinear Optimization and Application. New York: Plenum Publishing Corporation, 1996: 155-170.

[62] Fukushima M. The primal Douglas-Rachford splitting algorithm for a class of monotone mappings with application to the traffic equilibrium problem. Math. Program., Ser. A, 1996, 72(1): 1-15.

[63] Gabay D. Applications of the method of multipliers to variational inequalities// Fortin M, Glowinski R. Augmented Lagrangian Methods: Application to the Numerical Solution of Boundary-Value Problems. Amsterdam: North-Holland, 1983: 229-332.

[64] Giannessi F. Vector Variational Inequalities and Vector Equilibria: Mathematical Theories.

Dordrecht: Kluwer Academic, 2000.

[65] Giannessi F. On Minty variational principle// Giannessi F, Komlosi S, Tapcsack T. New Trends in Mathematical Programming. Dordrechet: Kluwer Academic, 1998: 93-99.

[66] Giannessi F. Theorems of alternative, quadratic programs and complementary problems// Cottle R W, Giannessi F, Lions J C. Variational Inequality and Complementary Problems. New York: Wiley and Sons, 1980.

[67] Glowinski R. Numerical Methods for Nonlinear Variational Problems. New York: Springer, 1984.

[68] Glowinski R, Lions J L, Trémolières R. Numerical Analysis of Variational Inequalities. Amsterdam: North-Holland, 1981.

[69] 韩渭敏, 程晓良. 变分不等式简介 —— 基本理论、数值分析及应用. 北京: 高等教育出版社, 2007.

[70] Han W, Sofonea M. Quasistatic Contact Problems in Viscoelasticity and Viscoplasticity. Sommerville, MA: American Mathematical Society, Providence, RI-Intl. Press, 2002.

[71] Hartman P, Stampacchia G. On some nonlinear elliptic differential functional equations. Acta Math., 1966, 15: 271-310.

[72] Haslinger J, Miettinen M, Panagiotopoulos P D. Finite Element Method for Hemivariational Inequalities: Theory, Methods and Applications. Dordrecht, Boston, London: Kluwer Academic Publishers, 1999.

[73] He Y R. A new double projection algorithm for variational inequalities. J. Comput. Appl. Math., 2006, 185: 166-173.

[74] He Y R. Stable pseudomonotone variational inequality in reflexive Banach spaces. J. Math. Anal. Appl., 2007, 330: 352-363.

[75] Hlaváček I, Haslinger J, Nečas J, et al. Solution of Variational Inequalities in Mechanics. New York: Springer-Verlag, 1988.

[76] Hosseini S, Pouryayevali M R. Generalized gradients and characterization of epi-Lipschitz sets in Riemannian manifolds. Nonlinear Anal., 2001, 74: 3884-3895.

[77] Iiduka H, Takahashi W. Strong convergence theorems for nonexpansive mappings and inverse-strongly monotone mappings. Nonlinear Anal., 2005, 61: 341-350.

[78] Iiduka H, Takahashi W. Strong convergence theorem by a hybrid method for nonlinear mappings of nonexpansive and monotone type and applications. Adv. Nonlinear Var. Inequal., 2006, 9: 1-10.

[79] Iiduka H, Yamada I. A use of conjugate gradient direction for the convex optimization problem over the fixed point set of a nonexpansive mapping. SIAM J. Optim., 2009, 19: 1881-1893.

[80] Iiduka H, Yamada I. A subgradient-type method for the equilibrium problem over the fixed point set and its applications. Optimization, 2009, 58: 251-261.

[81] Iusem A N, Pérez L R L. An extragradient-type algorithm for nonsmooth variational inequalities. Optimization, 2000, 48(3): 309-332.

[82] Jaiboon C, Kumam P. Strong convergence theorems for solving equilibrium problems and fixed point problems of ξ-strict pseudo-contraction mappings by two hybrid projection methods. J. Comput. Appl. Math., 2010, 230: 722-732.

[83] Kalita P. Convergence of Rothe scheme for hemivariational inequalities of parabolic type. Int. J. Numer. Anal. Model., 2013, 10: 445-465.

[84] Konnov I V. A combined relaxation method for variational inequalities with nonlinear con-

straints. Math. Program., 1998, 80: 239-252.

[85] Kulikov A N, Fazylov V R. A finite solution method for systems of convex inequalities. Soviet Mathematics(Izvestiya VUZMatematika), 1984, 28(11): 75-80.

[86] Lee G M. On relations between vector variational inequality and vector optimization problem// Yang X Q, et al. Progress in Optimization. Dordrechet: Kluwer, 2000.

[87] Lee C H, Ansari Q H, Yao J C. A perturbed algorithm for strongly nonlinear variational-like inclusions. Bull. Austral. Math. Soc., 2000, 62: 417-426.

[88] Lee G M, Kim D S. Existence of solutions for vector optimization problems. J. Math. Anal. Appl., 1998, 220: 90-98.

[89] Lee G M, Kim D S, Lee B S, et al. Vector variational inequality as a tool for studying vector optimization problems. Nonlinear Anal. TMA, 1998, 34: 745-765.

[90] Li F L, He Y R. An algorithm for generalized variational inequality with pseudomonotone mapping. J. Comput. Appl. Math., 2009, 228: 212-218.

[91] Li C, López G, Martín-Márquez V. Monotone vector fields and the proximal point algorithm on Hadamard manifolds. J. Lond. Math. Soc., 2009, 79: 663-683.

[92] Li C, López G, Martín-Márquez V, et al. Resolvents of set-valued monotone vector fields in Hadamard manifolds. Set-valued Var. Anal., doi: 10.1007/s11228-010-0169-1.

[93] Li C, Yao J C. Variational inequalities for set-valued vector fields on Riemannian manifolds: convexity of the solution set and the proximal point algorithm. SIAM J. Control Optim., 2012, 50(4): 2486-2514.

[94] Lions J L, Stampacchia G. Variational inequalities. Commun. Pure Appl. Anal., 1967, 20: 493-519.

[95] Liu Z, Zhang S. On the degree theory for multivalued (S+) type mappings. Applied Mathematics and Mechanics, 1998, 1: 1141-1149.

[96] Maingé P E. A hybrid extragradient-viscosity method for monotone operators and fixed point problems. SIAM J. Control Optim., 2008, 47: 1499-1515.

[97] Maingé P E. Projected subgradient techniques and viscosity methods for optimization with variational inequality constraints. Eur. J. Oper. Res., 2010, 205: 501-506.

[98] Marino G, Xu H K. Weak and strong convergence theorems for strict pseudocontractions in Hilbert spaces. J. Math. Anal. Appl., 2007, 205: 336-346.

[99] Migorski S. On existence of solutions for parabolic hemivariational inequalities. Journal of Computational and Applied Mathematics, 2001, 129: 77-87.

[100] Migorski S, Ochal A. Hemivariational inequalities for stationary Navier-Stokes equations. J. Math. Anal. Appl., 2005, 306: 197-217.

[101] Migorski S, Ochal A. Navier-Stokes problems modeled by evolution hemivariational inequalities. Discrete and Continuous Dynamical Systems, 2007, (Supplement): 731-740.

[102] Migórski S, Ochal A, Sofonea M. Nonlinear Inclusions and Hemivariational Inequalities. Models and Analysis of Contact Problems// Advances in Mechanics and Mathematics. New York: Springer, 2013.

[103] Mishra S K, Wang S Y. Vector variational-like inequalities and nonsmooth vector optimization problems. Nonlinear Anal., 2006, 64: 1939-1945.

[104] Nadezhkina N, Takahashi W. Weak convergence theorem by an extragradient method for nonexpansive mappings and monotone mappings. J. Optim. Theory Appl., 2006, 128:

191-201.

[105] Nsadezhkina N, Takahashi W. Strong convergence theorem by a hybrid method for nonexpansive mappings and Lipschitz-continuous monotone mappings. SIAM J. Optim., 2006, 16: 1230-1241.

[106] Naniewicz Z, Panagiotopoulos P D. Mathematical Theory of Hemivariational Inequalities and Applications. New York: Dekker, 1995.

[107] Németh S Z. Monotone vector fields. Publicationes Mathematics, 1999, 54: 437-449.

[108] Németh S Z. Geodesic monotone vector fields. Lobachevskii J. Math., 1999, 5: 13-28.

[109] Németh S Z. Variational inequalities on Hadamard manifolds. Nonlinear Anal., 2003, 52: 1491-1498.

[110] Ng K F, Tan L L. Error bounds of regularized gap functions for nonsmooth variational inequality problems. Math. Program., Ser. A, 2007, 110: 405-429.

[111] Noor M A. Some predictor-corrector algorithms for multivalued variational inequalities. Journal of Optimization Theory and Applications, 2001, 108(3): 659-671.

[112] Noor M A. Modified resolvent algorithm for general mixed quasi-variational inequalities. Mathematical and Computer Modelling, 2002, 36: 737-745.

[113] Noor M A. Generalized mixed quasi-equilibrium problem with trifunction. Applied Mathematics Letters, 2005, 18: 695-700.

[114] Noor M A. General variational inequalities and nonexpansive mappings. J. Math. Anal. Appl., 2007, 331: 810-822.

[115] Noor M A. Merit functions for general variational inequalities. J. Math. Anal. Appl., 2006, 316: 736-752.

[116] Noor M A, Huang Z Y. Three-step methods for nonexpansive mappings and variational inequalities. Appl. Math. Comput., 2007, 187: 680-685.

[117] Opial Z. Weak convergence of the sequence of successive approximations for nonexpansive mappings. Bulletin of the American Mathematical Society, 1967, 73: 591-597.

[118] Panagiotopoulos P D. Nonconvex energy functions, hemivariational inequalities and substationary principles. Acta Mechanica, 1983, 42: 160-183.

[119] Panagiotopoulos P D. Hemivariational Inequalities, Applications in Mechanics and Engineering. Berlin: SpringerVerlag, 1993.

[120] Pang J S. Error bounds in mathematical programming. Math. Program., 1997, 79: 299-332.

[121] Peng J M. Equivalence of variational inequality problems to unconstrained optimization. Math. Program., 1997, 78: 347-356.

[122] Polyak B T. Introduction to Optimization. New York: Optimization Software Inc., Publications Division, 1987.

[123] Quiroz E A P, Quispe E M, Oliveira P R. Steepest descent method with a generalized Armijo search for quasiconvex functions on Riemannian. J. Math. Anal. Appl., 2008, 341: 467-477.

[124] Rapscák T. Smooth Nonlinear Optimization in R^n. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1997.

[125] Rockafellar R T. On the maximality of sums of nonlinear monotone operators. Trans. Amer. Math. Soc., 1970, 149: 75-88.

[126] Roubicek T. Nonlinear Partial Differential Equations with Applications. Basel, Boston, Berlin: Birkhäuser Verlag, 2005.

[127] Saigal R. Extension of the generalized complementarity problem. Math. Oper. Res., 1976, 1(3): 260-266.

[128] Sakai T. Riemannian Geometry, Translations of Mathematical Monographs 149. Providence, RI: American Mathematical Society, 1996.

[129] Salmon G V, Strodiot J J, Nguyen V H. A bundle method for solving variational inequalities. SIAM J. Optim., 2003, 14(3): 869-893.

[130] Santos P S M, Scheimberg S. A projection algorithm for general variational inequalities with perturbed constraint set. Appl. Math. Comput., 2006, 181: 649-661.

[131] Sibony M. Méthodes itératives pour les équations et inéquations aux dérivées partielles non-linéares de type monotone. Calcolo, 1970, 7: 65-183.

[132] Signorini A. Sopra a une questioni di elastostatica. Atti della Societ Italiana per il Progesso delle Scienze, 1933.

[133] Solodov M V, Svaiter B F. A new projection method for variational inequality problems. SIAM J. Control Optim., 1999, 37: 765-776.

[134] Solodov M V, Svaiter B F. Forcing strong convergence of proximal point iterations in Hilbert space. Math. Program., 2000, 87: 189-202.

[135] Solodov M V. Merit functions and error bounds for generalized variational inequalities. J. Math. Anal. Appl., 2003, 287: 405-414.

[136] Stampacchia G. Formes bilineaires coercitives sur les ensembles convexes. C. R. Acad. Sci., 1964, 258: 4413-4416.

[137] Suzuki T. Strong convergence of Krasnoselskii and mann's type sequences for one-parameter nonexpansive semigroups without Bochner integrals. J. Math. Anal. Appl., 2005, 305: 227-239.

[138] 孙洪春, 王宜举. 闭凸多面体上的广义变分不等式与互补问题的误差界. 工程数学学报, 2007, 24(4): 691-695.

[139] Tan L L. Regularized gap functions for nonsmooth variational inequality problems. J. Math. Anal. Appl., 2007, 334: 1022-1038.

[140] Tang G J, Huang N J. Korpelevich's method for variational inequality problems on Hadamard manifolds. J. Glob. Optim., 2012, 54: 493-509.

[141] Tang G J, Huang N J. An inexact proximal point algorithm for maximal monotone vector fields on Hadamard manifolds. Oper. Res. Lett., 2013, 41: 586-591.

[142] Tang G J, Zhou L W, Huang N J. The proximal point algorithm for pseudomonotone variational inequalities on Hadamard manifolds. Optim. Lett., 2013, 7: 779-790.

[143] Takahashi W, Toyoda M. Weak convergence theorems for nonexpansive mappings and monotone mappings. J. Optim. Theory Appl., 2013, 118: 417-428.

[144] Thämelt W. Directional derivatives and generalized gradients on manifolds. Optimization, 1992, 25: 97-115.

[145] Udriste C. Convex Functions and Optimization Methods on Riemannian Manifolds. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1994.

[146] Verma R U. Generalized system for relaxed cocoercive variational inequalities and projection methods. J. Optim. Theory Appl., 2004, 121(1): 203-210.

[147] Wang X, Li S, Kou X. An extension of subgradient method for variational inequality problems in Hilbert space. Abstract and Applied Analysis, 2013: 2013.

[148] Wang J H, López G. Modified proximal point algorithms on Hadamard manifolds. Optimization, 2011, 60(6): 697-708.

[149] Wang J H, López G, Martín-Márquez V, et al. Monotone and accretive vector fields on Riemannian manifolds. J. Optim. Theory Appl., 2001, 146: 691-708.

[150] Wang F H, Xu H K. Weak and strong convergence theorems for variational inequality and fixed point problems with Tseng's extragradient method. Taiwan J. Math., 2012, 16: 1125-1136.

[151] Xu H K. Iterative algorithms for nonlinear operators. J.London Math. Soc., 2002, 66: 240-256.

[152] Xu H K, Kim T H. Convergence of hybrid steepest-descent methods for variational inequalities. J. Opti. Theorey and Appl., 2003, 119: 185-201.

[153] Yamashita N, Taji K, Fukushima M. Unconstrained optimization reformulations of variational inequality problems. J. Optim. Theory Appl., 1997, 92: 439-456.

[154] Yang X M, Yang X Q, Teo K L. Some remarks on the Minty vector variational inequality. J. Optim. Theory Appl., 2004, 121(1): 193-201.

[155] Yosida K. Functional Analysis. 5th ed. Berlin: Springer, 1978.

[156] Zarantonello E H. Projections on convex sets in Hilbert space and spectral theory// Zarantonello E H. Contributions to Nonlinear Functional Analysis. New York: Academic Press, 1971.

[157] Zeidler E. Nonlinear Functional Analysis and Its Applications, Vol. II/B: Nonlinear Monotone Operators. New York, Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 1990.

[158] 张石生. 变分不等式及其相关问题. 重庆: 重庆出版社, 2008.

[159] Zhao Y B, Li D. Monotonicity of fixed point and normal mappings associatied with variational inequality and its application. SIAM J. Optim., 2001, 11(4): 962-973.

索　　引